TRƯỜNG ĐẠI HỌC ĐỒNG THÁP

KHOA SƯ PHẠM TOÁN - TIN

BỒI DƯỠNG NĂNG LỰC HUY ĐỘNG KIẾN THỨC CHO HỌC SINH THÔNG QUA DẠY HỌC CHỦ ĐỀ PHƯƠNG TRÌNH – HỆ PHƯƠNG TRÌNH TRONG ĐẠI SỐ 10 CƠ BẢN

KHÓA LUẬN TỐT NGHIỆP

Ngành đào tạo: Sư phạm Toán học

Trình độ đào tạo: Đại học

Đồng Tháp, năm 2014

TRƯỜNG ĐẠI HỌC ĐỒNG THÁP

KHOA SƯ PHẠM TOÁN - TIN

BỒI DƯỠNG NĂNG LỰC HUY ĐỘNG KIẾN THỨC CHO HỌC SINH THÔNG QUA DẠY HỌC CHỦ ĐỀ PHƯƠNG TRÌNH – HỆ PHƯƠNG TRÌNH TRONG ĐẠI SỐ 10 CƠ BẢN

KHÓA LUẬN TỐT NGHIỆP

Ngành đào tạo: Sư phạm Toán học

Trình độ đào tạo: Đại học

Giảng viên hướng dẫn: TS. LÊ XUÂN TRƯỜNG

Sinh viên thực hiện: VÕ THỊ KIM PHƯƠNG

Đồng Tháp, năm 2014

LỜI CAM ĐOAN

Tôi cam đoan đây là công trình nghiên cứu của tôi. Những kết quả và các số liệu trong khóa luận chưa được ai công bố dưới bất cứ hình thức nào. Tôi hoàn toàn chịu trách nhiệm trước Nhà trường về sự cam đoan này.

Đồng Tháp, ngày 19 tháng 4 năm 2014

Tác giả

Võ Thị Kim Phương

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Công cuộc đổi mới của đất nước đã và đang đặt ra cho ngành giáo dục và đào tạo nhiệm vụ to lớn và hết sức nặng nề đó là đào tạo nguồn nhân lực chất lượng cao đáp ứng yêu cầu của sự nghiệp công nghiệp hóa, hiện đại hóa đất nước. Để thực hiện nhiệm vụ này, bên cạnh việc đổi mới mục tiêu, nội dung chương trình và sách giáo khoa ở mọi bậc học, chúng ta đã quan tâm nhiều đến việc đổi mới phương pháp dạy học. Điều này đã được thể chế hóa trong luật giáo dục (năm 2005, điều 5): "Phương pháp giáo dục phải phát huy tính tích cực, tự giác, chủ động, tư duy sáng tạo của người học, bồi dưỡng cho người học năng lực tự học, kĩ năng thực hành, lòng say mê học tập và ý chí vươn lên".

Để làm tròn trách nhiệm đó, người giáo viên phải có đủ những kiến thức cần thiết, có thời gian và kinh nghiệm sư phạm, phải có lòng tận tâm và phương pháp đúng đắn, biết đề ra cho học sinh đúng lúc, đúng chỗ những câu gợi ý sâu sắc, phù hợp với trình độ đối tượng và trong chừng mực nào đó sử dụng khéo léo, linh hoạt. Từ đó mới hình thành cho học sinh một số tri thức, phương pháp giải toán nhằm rèn luyện và phát triển ở họ năng lực tư duy khoa học.

Hiện nay, năng lực huy động kiến thức trong dạy học toán ở các trường Trung học phổ thông chưa được quan tâm đúng mức, học sinh còn gặp một số khó khăn trong việc phát hiện cách giải quyết vấn đề. Theo A.A.Stôliar: "Dạy toán là dạy hoạt động toán học". Với quan điểm này ta hiểu rằng: dạy toán không chỉ đơn thuần là dạy kiến thức mà còn dạy cho học sinh cách huy động kiến thức sao cho phù hợp để khi đứng trước một vấn đề các em có thể biết cách lựa chọn tri thức phù hợp và đúng đắn. Song áp dụng như thế nào còn phụ thuộc vào năng lực huy động kiến thức của chính các em. Với yêu cầu đổi mới dạy học toán ở Trường trung học phổ thông hiện nay đòi hỏi học sinh phải hoạt động tích cực để tự chiếm lĩnh tri thức cho bản thân.

Trong nhiều công trình nghiên cứu tâm lí học, giáo dục học đều cho rằng, năng lực giải toán của học sinh phụ thuộc phần lớn vào khả năng huy động kiến thức. Thật vậy, nếu học sinh có khả năng huy động kiến thức tốt thì sẽ giúp các em dễ dàng phân tích bài toán, nắm được bản chất của bài toán, từ đó tìm ra phương hướng giải của bài toán. Hơn thế, năng lực huy động kiến thức còn giúp các em tìm ra nhiều cách giải hơn. Việc bồi dưỡng năng lực huy động kiến thức cho học sinh có vai trò quan trọng trong quá trình giải toán. Do đó, trong quá trình dạy học, nếu người giáo viên thường xuyên có ý thức trao dồi khả năng huy động kiến thức cho học sinh thì khi hướng dẫn học sinh giải bài tập toán sẽ làm cho quá trình học sinh tiếp cận bài toán tự nhiên hơn, tránh được những tình trạng chụp mũ, áp đặt lời giải một cách đột ngột, tạo cho học sinh cảm giác căng thẳng, mệt mỏi và nhàm chán môn học.

Trong chương trình toán ở trường Trung học phổ thông có nhiều cơ hội để bồi dưỡng năng lực huy động kiến thức cho học sinh. Đặc biệt là mảng kiến thức về phương trình và hệ phương trình, vì đây là một trong những chủ đề quan trọng, được rất nhiều bạn học sinh và thầy cô giáo yêu thích trong chương trình toán ở nhà trường phổ thông. Kiến thức và kĩ năng về chủ đề này có mặt xuyên suốt từ cấp trung học cơ sở, trung học phổ thông và còn là chìa khóa để giải quyết nhiều vấn đề trong đại số, giải tích và hình học, đặc biệt là hình học giải tích. Vì vậy bên cạnh việc giảng dạy các kiến thức lý thuyết một cách đầy đủ theo quy định của chương trình, việc dạy cho học sinh biết cách huy động kiến thức sao cho phù hợp để khi đứng trước một vấn đề các em có thể biết cách lựa chọn tri thức phù hợp và đúng đắn, đang là vấn đề cấp thiết và có ý nghĩa quan trọng trong việc nâng cao chất lượng dạy học môn Toán.

Tuy nhiên thực tiễn cho thấy, trong quá trình học toán, rất nhiều học sinh còn bộc lộ những yếu kém, hạn chế: không có quá trình luyện tập giải nhiều bài tập, do đó không có khả năng huy động kiến thức khi phải giải một bài toán, dẫn đến cách suy nghĩ vẫn tản mạn, mất nhiều thời gian mới tìm được cách giải, hoặc rơi vào tình trạng mông lung giữa một mớ bòng bong những kiến thức mà không tìm được phương kế. Mặt khác, một bộ phận giáo viên chưa dày công nghiên cứu, chưa chọn lọc được hệ thống bài tập đa dạng, đào sâu mọi khía cạnh của kiến thức, do đó chưa huy động kiến thức cho học sinh một cách triệt để.

Chính vì những lí do trên nên tôi đã thực hiện đề tài: "***Bồi dưỡng năng lực huy động kiến thức cho học sinh thông qua dạy học chủ đề phương trình - hệ phương trình trong Đại số 10 cơ bản***"**.**

2. Tổng quan về đề tài:

Nghiên cứu về năng lực huy động kiến thức cho học sinh xuất phát từ việc nghiên cứu một số công trình về tâm lí học và giáo dục học. Từ quá trình hoạt động, học sinh dần dần hình thành tri thức, kĩ năng, kĩ xảo cho bản thân cho đến lúc sự phát triển đủ khả năng giải quyết những vấn đề phức tạp.

Năng lực là một vấn đề trừu tượng của tâm lí học. Khái niệm này cho đến nay vẫn có nhiều cách hiểu và diễn đạt khác nhau. Năng lực huy động kiến thức để giải quyết vấn đề tùy mức độ khác nhau được vận dụng trong nhiều phương pháp dạy học tích cực, dạy học theo quan điểm phát hiện. Từ nhu cầu thực tế đó đã có một số công trình nghiên cứu về năng lực huy động kiến thức và cách huy động kiến thức có hiệu quả như Luận văn thạc sĩ: "*Bồi dưỡng năng lực huy động kiến thức cho học sinh khá, giỏi bậc trung học cơ sở thông qua phát triển các bài toán cơ bản*" của Khương Thị Thanh, Đại Học Vinh; Luận văn "*Rèn luyện năng lực huy động kiến thức cho học sinh trong dạy học phát hiện và giải quyết vấn đề ở trường THPT thể hiện qua chủ đề phương pháp tọa độ trong không gian*" của Nguyễn Thị Thu, Đại học Vinh. Tuy nhiên, việc xây dựng hệ thống các bài toán về chủ đề phương trình và hệ phương trình để giúp học sinh lớp 10, ban cơ bản rèn luyện năng lực huy động kiến thức thì chưa được ai nghiên cứu. Do vậy, tôi đã chọn đề tài này.

3. Mục tiêu nghiên cứu:

- Làm sáng tỏ một số vấn đề lí luận về bồi dưỡng năng lực huy động kiến thức cho học sinh thông qua dạy học chủ đề phương trình - hệ phương trình trong Đại số 10 cơ bản.
- Đề xuất một số biện pháp bồi dưỡng năng lực huy động kiến thức đã có của học sinh thông qua dạy học giải toán chủ đề*:**“Phương trình - hệ phương trình trong Đại số 10 cơ bản*”.**

4. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu:

- Đối tượng nghiên cứu: Các biện pháp bôi dưỡng năng lực huy động kiến thức.
- Phạm vi nghiên cứu: Phương trình – hệ phương trình theo chương trình đại số 10 cơ bản.

5. Nội dung nghiên cứu*:* gồm 3 chương

Chương 1: Cơ sở lí luận và thực tiễn

1.1 Năng lực huy động kiến thức cho học sinh trong dạy học Toán

1.1.1 Quan niệm về năng lực huy động kiến thức

1.1.2 Một số dạng biểu hiện của năng lực huy động kiến thức

1.1.3 Vai trò của năng lực huy động kiến thức trong dạy học Toán

1.2 Nội dung và đặc điểm chủ đề phương trình - hệ phương trình

1.3 Thực trạng về bồi dưỡng năng lực huy động kiến thức cho học sinh trong dạy học ở một số trường trung học phổ thông

Chương 2: Các biện pháp chủ yếu bồi dưỡng năng lực huy động kiến thức cho học sinh lớp 10, ban cơ bản trong dạy học chủ đề phương trình - hệ phương trình

2.1 Các định hướng đề xuất biện pháp

2.2 Các biện pháp bồi dưỡng năng lực huy động kiến thức cho học sinh thông qua dạy học chủ đề phương trình-hệ phương trình trong Đại số 10 cơ bản

2.2.1 Biện pháp 1: Thường xuyên củng cố kiến thức và rèn luyện kĩ năng giải các bài toán về phương trình, hệ phương trình cho học sinh

2.2.2 Biện pháp 2: Rèn luyện cho học sinh khả năng đặt câu hỏi và tìm cách trả lời nhằm huy động kiến thức một cách triệt để khi giải phương trình, hệ phương trình

2.2.3 Biện pháp 3: Tăng cường các hoạt động phân tích và sửa chữa sai lầm của học sinh, góp phần rèn luyện khả năng sàng lọc liên tưởng và huy động kiến thức khi giải phương trình, hệ phương trình

2.2.4 Biện pháp 4: Rèn luyện cho học sinh năng lực huy động kiến thức thông qua dạy học chuỗi bài tập về phương trình, hệ phương trình

2.2.5 Biện pháp 5: Rèn luyện kĩ năng biến đổi bài toán theo nhiều hình thức khác nhau để huy động kiến thức thích hợp giải phương trình, hệ phương trình

Chương 3: Thực nghiệm sư phạm

3.1 Mục đích thực nghiệm

3.2 Tổ chức và nội dung thực nghiệm

3.3 Tiến trình thực nghiệm

3.4 Kết luận về thực nghiệm sư phạm

6. Phương pháp nghiên cứu:

6.1 Nghiên cứu lý luận:

- Nghiên cứu tài liệu giáo dục học, lý luận dạy học môn Toán.
- Nghiên cứu sách, báo, tạp chí về khoa học toán học, tâm lý học, các công trình... liên quan đến đề tài.

6.2 Quan sát: Dự giờ, quan sát việc dạy của giáo viên, việc học của học sinh, thăm dò các ý kiến của giáo viên về các vấn đề nghiên cứu liên quan.

6.3 Thực nghiệm sư phạm: Tổ chức thực nghiệm kiểm chứng thông qua các lớp học thực nghiệm và các lớp học đối chứng trên cùng một lớp đối tượng.

6.4 Xử lý số liệu thực tiễn và thực nghiệm bằng phương pháp thống kê toán học.

7. Kế hoạch nghiên cứu:

- Từ tháng 10/2013 đến 30/11/2013 nhận đề tài, hoàn thành đề cương;

- Từ 30/11/2013 đến 15 tháng 4 năm 2014 hoàn thành khóa luận.

Chương 1

CƠ SỞ LÝ LUẬN VÀ THỰC TIỄN

1.1 Năng lực huy động kiến thức cho học sinh trong dạy học Toán

1.1.1 Quan niệm về năng lực, năng lực huy động kiến thức

Khái niệm năng lực có nguồn gốc tiếng La tinh "competentia". Ngày nay khái niệm năng lực được hiểu theo nhiều nghĩa khác nhau. Năng lực được hiểu như sự thành thạo, khả năng thực hiện của cá nhân đối với một công việc. Năng lực cũng được hiểu là khả năng, công suất của một doanh nghiệp, thẩm quyền pháp lý của một cơ quan.

Khái niệm năng lực được dùng trong toán học là đối tượng của tâm lý, giáo dục học. Vì một số công trình nghiên cứu về tâm lý học và giáo dục học chỉ ra rằng qua quá trình hoạt động học sinh dần hình thành tri thức, kĩ năng, kĩ xảo cho bản thân. Từ những nền tảng đó, họ bắt đầu phát triển những khả năng của mình ở mức độ từ thấp đến cao. Cho đến một lúc nào đó sự phát triển bên trong đủ khả năng giải quyết những vấn đề xuất hiện trong học tập và trong cuộc sống thì lúc đó học sinh sẽ có những năng lực nhất định.

Vậy thế nào là năng lực? Khái niệm này cho đến nay vẫn có nhiều cách hiểu và cách diễn đạt khác nhau, dưới đây là một số cách hiểu về năng lực. Garard và Roegies đã định nghĩa: "Năng lực là một tích hợp những kĩ năng cho phép nhận biết một tình huống và đáp ứng với tình huống đó tương đối thích hợp và một cách tự nhiên". Theo John Erpenbeck thì: "Năng lực được tri thức làm cơ sở, được sử dụng như khả năng, được quy định bởi giá trị, được tăng cường qua kinh nghiệm và được thực hiện hóa qua chủ định". Còn theo từ điển Tiếng Việt thì: "Năng lực là phẩm chất tâm lý tạo ra cho con người hoàn thành một loại hoạt động nào đó với chất lượng cao". Năng lực là một khái niệm tích hợp ở chỗ nó bao hàm cả những nội dung, những hoạt động cần thực hiện và những tình huống trong đó diễn ra các hoạt động. Theo từ điển tâm lí học (Vũ Dũng, 2000) thì: "Năng lực là tập hợp các tính chất hay phẩm chất của tâm lí cá nhân, đóng vai trò là điều kiện bên trong, tạo thuận lợi cho việc thực hiện tốt một dạng hoạt động nhất định". Tác giả Trần Đình Châu quan niệm: "Năng lực là những đặc điểm cá nhân của con người đáp ứng yêu cầu của một loại hoạt động nhất định và là điều kiện cần thiết để hoàn thành xuất sắc một số loại hoạt động đó".

Như vậy, năng lực là một thuộc tính tâm lí phức hợp, là điểm hội tụ của nhiều yếu tố như tri thức, kỹ năng, kỹ xảo, kinh nghiệm, sự sẵn sàng hành động và trách nhiệm.

Tuy có nhiều cách hiểu và diễn đạt khác nhau, song về cơ bản năng lực biểu hiện bởi các đặc trưng sau:

- Cấu trúc của năng lực là tổ hợp nhiều kĩ năng thực hiện những hoạt động thành phần có quan hệ chặt chẽ với nhau. Đồng thời năng lực còn liên quan đến khả năng phán đoán, nhận thức, hứng thú và tình cảm.

- Năng lực tồn tại và phát triển thông qua hoạt động. Nói đến năng lực tức là gắn với khả năng hoàn thành một hoạt động nào đó của cá nhân.

- Năng lực chỉ nảy sinh trong hoạt động giải quyết những yêu cầu mới mẽ và do đó nó gắn liền với tính sáng tạo tư duy có khác nhau về mức độ.

- Năng lực có thể rèn luyện và phát triển được.

- Với các cá nhân khác nhau có các năng lực khác nhau. Ở mỗi người có những loại năng lực khác nhau và hai người khác nhau thì có những năng lực khác nhau và tố chất ở họ khác nhau.

G.Polia nói: "Tất cả những tư liệu, yếu tố phụ, các định lý... sử dụng trong quá trình giải bài toán được lấy từ đâu? Người giải đã tích lũy được kiến thức đó trong trí nhớ, giờ đây rút ra và vận dụng một cách thích hợp để giải bài toán. Chúng ta gọi việc nhớ lại có chọn lọc các tri thức như vậy là sự huy động, việc làm cho chúng thích ứng với bài toán đang giải là sự tổ chức".

Trong quá trình giải một bài toán cụ thể nào đó, lẽ đương nhiên không cần huy động đến mọi kiến thức mà người giải thu thập được. Do vậy cần huy động đến những tri thức nào, cần xem xét đến những mối liên hệ nào, điều đó còn phụ thuộc vào khả năng chọn lọc của người giải.

Như vậy, ta có thể hiểu "*huy động*" là việc nhớ lại có chọn lọc các kiến thức đã có thích ứng với một vấn đề đặt ra mà mình cần giải quyết trong vốn tri thức của bản thân.

Năng lực huy động kiến thức là gì? Chúng ta có thể hiểu như sau: Năng lực huy động kiến thức là một tổ hợp những đặc điểm tâm lý của con người, đáp ứng việc nhớ lại có chọn lọc những kiến thức mà mình đã có thích ứng với một vấn đề đặt ra trong vốn tri thức của bản thân.

Toán học là một môn khoa học suy diễn nên có tính logic, hệ thống và kế thừa rất cao. Mọi kiến thức toán học đều xây dựng chặt chẽ và có cơ sở rất rõ ràng. Tri thức trước chuẩn bị cho tri thức sau, tri thức sau dựa vào tri thức trước, chúng liên kết lại với nhau như những mắt xích một cách chặt chẽ. Một kiến thức toán học mới hay một bài tập toán được đưa ra thì nó luôn nằm trong hệ thống toán học đó, nó không thể tách rời, không tự sinh ra một cách độc lập mà có những cơ sở nhất định nằm trong hệ thống kiến thức đã có trước đó. Để giải quyết được vấn đề chúng ta nhất thiết phải dựa vào những kiến thức cũ. Song để coi kiến thức nào là phù hợp với vấn đề đặt ra, kiến thức cũ sẽ sử dụng thế nào, đó chính là năng lực huy động kiến thức. Năng lực huy dộng kiến thức mỗi người một khác. Đứng trước một bài toán cụ thể, có người liên tưởng được nhiều định lí, mệnh đề, bài toán phụ mà những cái này có hi vọng giúp cho việc giải toán. Có người chỉ liên tưởng được đến một số ít định lí, mệnh đề, bài toán phụ, …mà thôi. Sức liên tưởng và huy động phụ thuộc vào khả năng tích lũy kiến thức và phụ thuộc vào sự nhạy bén trong khâu phát hiện vấn đề. Vì vậy đều đầu tiên người giáo viên cần chú ý khi hướng dẫn học sinh là khêu gợi trí tò mò, lòng ham muốn giải Toán của các em. Có thể bắt đầu từ những câu hỏi của G.Polya như: "Ta đã gặp bài toán này lần nào chưa? Hay là ta đã gặp nó dưới một dạng hơi khác". Còn người giải toán phải biết sắp xếp, lưu trữ kiến thức trong đầu sao cho hợp lý để khi cần huy động được chính xác, đầy đủ và phải biết giữ trong trí nhớ cái bản chất của những kiến thức toán học dưới dạng định lý đã chứng minh.

Như vậy có thể khẳng định: Không huy động kiến thức thì không thể giải được bài tập toán và cao hơn nữa là không thể kiến tạo tri thức cho bản thân.

Ta có thể minh họa thông qua ví dụ sau:

Ví dụ 1.1: Giải phương trình: $|2x+5| = x^2 + 5x + 1$

- Đây là phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối, bằng cách huy động kiến thức đã học, hãy cho biết có thể giải bài toán này bằng những phương pháp nào?

Phương pháp giải là khử dấu giá trị tuyệt đối để đưa về một phương trình bậc nhất hoặc một phương trình bậc hai.

- Hãy huy động kiến thức đã học và cho biết có những cách nào để khử dấu giá trị tuyệt đối?

Có hai cách khử dấu giá trị tuyệt đối. Đó là dùng định nghĩa của giá trị tuyệt đối hoặc bình phương hai vế.

Để chọn lọc những kiến thức thích hợp, trước hết ta hãy loại việc bình phương hai vế, vì nếu bình phương hai vế, ta dẫn đến phương trình bậc bốn: $x^4 + 10x^3 + 23x^2 - 10x - 24 = 0$, cách giải này rất phức tạp.

Trong khi đó nếu dùng định nghĩa của giá trị tuyệt đối, ta qui về việc giải phương trình bậc hai quen thuộc và được nghiệm duy nhất là $x = 1$.

(Chú ý: Biểu thức dưới căn bậc hai của $4x^2 + 2x + 10$ luôn luôn dương với mọi x, vì $4x^2 + 2x + 10 = (2x + \frac{1}{2})^2 + \frac{39}{4}$)

Ví dụ 1.2: Giả sử $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình:

$$x^2 + (m-4)x + m^2 - 3m + 3 = 0$$

Tìm các giá trị của *m* để $x_1^2 + x_2^2 = 6$?

- Bằng cách huy động kiến thức, hãy cho biết phương trình bậc hai có nghiệm thì cần phải thỏa mãn điều kiện gì?

$$\Delta \ge 0 \Leftrightarrow -3m^2+4m+4\ge 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3}\le m\le 2 \ (2)$$

- Tiếp tục huy động kiến thức đã học, hãy cho biết có thể áp dụng định lí gì để biểu diễn mối liên hệ giữa các nghiệm của phương trình ?

Ta có thể sử dụng định lí Vi – ét để biểu diễn các nghiệm của phương trình, cụ thể như sau:

Theo định lí Vi – ét, ta có:

$$\begin{cases} x_1+x_2=4-m \\ x_1.x_2=m^2-3m+3 \end{cases}$$

- Hãy biểu diễn $x_1^2+x_2^2$ theo $x_1+x_2; x_1.x_2$?

Ta có:

$$6=x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1.x_2=(4-m)^2-2(m^2-3m+3)=-m^2-2m+10$$

hay $m^2+2m-4=0$

Vậy $m=-1\pm\sqrt{5}$

Kết hợp với điều kiện (1), giá trị m cần tìm là $m=-1+\sqrt{5}$.

1.1.2 Một số dạng biểu hiện của năng lực huy động kiến thức

1.1.2.1 Năng lực chuyển đổi bài toán về bài toán tương đương nhằm tạo điều kiện cho việc huy động kiến thức

Trong khi tiến hành giải bài toán, học sinh có thể gặp khó khăn khi tìm cách giải quyết hoặc là muốn có nhiều cách giải quyết khác nhau. Khi đó, một trong những phương án có thể đáp ứng được nhu cầu đó là năng lực biến đổi, đưa về những bài toán đơn giản hơn và cuối cùng dẫn đến một bài toán đã biết cách giải.

Tuy nhiên, nếu hiểu từ biến đổi theo nghĩa thông thường, thuần túy thì không phải sự biến đổi nào cũng dẫn đến bài toán đơn giản hơn và đã có cách giải. Rất nhiều trường hợp cách làm đó không đem lại kết quả gì, do việc tính toán dẫn đến vô cùng phức tạp, bài toán dẫn đến không rơi vào trường hợp đặc biệt quen biết rõ ràng nào cả. Bằng cách biến đổi theo nghĩa rộng, phát biểu lại bài toán mà với cách phát biểu này, bài toán mới hoàn toàn tương đương với bài toán ban đầu nhưng dưới dạng dễ hiểu, cho ta cách giải bài toán tự nhiên và đơn giản.

Việc chuyển đổi cách phát biểu bài toán đưa về bài toán tương đương bao hàm sự biến đổi đại số hoặc lượng giác, phép thế, ẩn số phụ, bằng cách chuyển đổi từ ngôn ngữ toán học này sang ngôn ngữ toán học khác (đại số, hình học, giải tích,..). Việc làm này có tác dụng thúc đẩy quá trình huy động và tổ chức kiến thức của học sinh một cách liên tục, tích cực, giúp học sinh rèn luyện các thao tác tư duy.

Ví dụ 1.3: Giải phương trình: $x^2+x+12\sqrt{x+1}=36$ (1)

Đối với bài toán này, học sinh có thể huy động kiến thức để chuyển đổi bài toán về bài toán tương đương và cuối cùng dẫn đến một bài toán đã biết cách giải như: đặt ẩn phụ, biến đổi tương đương.

- Hướng 1: Chuyển bài toán đã cho về bài toán tương đương bằng cách đặt ẩn phụ:

Điều kiện: $x\geq -1$, đặt $u=\sqrt{x+1};u\geq 0$

(1) trở thành: $(u-2)(u^3+2u^2+3u+18)=0$.

Huy động kiến thức về cách giải phương trình tích tìm được $u=2$

Với $u=2$. Khi đó: $\sqrt{x+1}=2\Leftrightarrow x=3$ (Nhận)

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=3$.

- Hướng 2: Dùng biến đổi tương đương

Huy động kiến thức đã học để đưa về hằng đẳng thức quen thuộc, cụ thể như sau:

$$(1)\Leftrightarrow (x+1)^2=(6-\sqrt{x+1})^2\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=6-\sqrt{x+1} \\ x+1=\sqrt{x+1}-6 \end{array}\right.$$

Tới đây, huy động cách giải về phương trình chứa dấu căn để giải, cụ thể như sau:

* $x+1=6-\sqrt{x+1} \Leftrightarrow \sqrt{x+1}=5-x \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 5 \\ x+1=(5-x)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le 5 \\ x^2-11x+24=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 5 \\ \left[\begin{array}{l} x=8 \\ x=3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=3$

* $x+1=\sqrt{x+1}-6 \Leftrightarrow \sqrt{x+1}=x+7 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -7 \\ x^2+13x+48=0 \quad \text{(VN)} \end{cases} \Leftrightarrow x=\varnothing$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=3$.

***Ví dụ 1.4*:** Tìm *m* để phương trình: $2x^4+(m+2)x^2+m^2-1=0$ (1) có nghiệm.

Để giải bài toán này, đòi hỏi học sinh phải huy động kiến thức về cách giải phương trình trùng phương để chuyển về dạng phương trình bậc hai quen thuộc, bằng cách đặt $t=x^2$. Ở đây cần lưu ý cho học sinh tầm quan trọng khi xác định điều kiện của ẩn phụ $t \ge 0$. Khi đó phương trình có dạng:

$$2t^2+(m+2)t+m^2-1=0$$

Vậy ta đã chuyển đổi bài toán đã cho về bài toán tương đương là xác định định *m* để phương trình: $2t^2+(m+2)t+m^2-1=0$ (2) có nghiệm không âm.

Tới đây, yêu cầu học sinh bằng cách huy động kiến thức đã học, hãy cho biết phương trình bậc hai có nghiệm không âm khi và chỉ khi thỏa mãn điều kiện nào?

(2) có nghiệm không âm $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \ge 0 \\ S \ge 0 \\ P \ge 0 \end{cases}$

Tới đây huy động cách giải về phương trình bậc hai để tính Δ, định lí Viét để tính S, P, cụ thể như sau:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ S \geq 0 \\ P \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+2)^2 - 8(m^2-1) \geq 0 \\ -\dfrac{(m+2)}{2} \geq 0 \\ \dfrac{m^2-1}{2} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7m^2 + 4m + 12 \geq 0 \\ m \leq -2 \\ \left[\begin{array}{l} m \geq 1 \\ m \leq -1 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(1-\sqrt{22})}{7} \leq m \leq -1$$

Vậy với $\dfrac{2(1-\sqrt{22})}{7} \leq m \leq -1$ thì phương trình đã cho có nghiệm.

Ở đây ta quan tâm nhiều đến việc chuyển đổi cách phát biểu bài toán ban đầu sang bài toán mới tương đương với nó, bằng cách đặt ẩn phụ, đây cũng là cách thường gặp khi giải phương trình.

Như vậy, nếu không huy động được mối quan hệ giữa miền biến thiên của ẩn phụ với miền xác định *x* của bài toán, lãng quên điều kiện của ẩn phụ thì học sinh sẽ lúng túng khi chuyển đổi bài toán hoặc giữ nguyên yêu cầu bài toán từ ẩn ban đầu áp đặt sang bài toán đối với ẩn phụ tức là chuyển đổi sai bài toán.

Vì vậy, việc chuyển đổi cách phát biểu về bài toán tương đương bằng cách đặt ẩn phụ, cần rèn cho học sinh thói quen đặt điều kiện cho ẩn phụ một cách có lập luận, có căn cứ chặt chẽ, tránh đưa ra những nhận định về điều kiện của ẩn phụ một cách cảm tính thiếu cơ sở chặt chẽ.

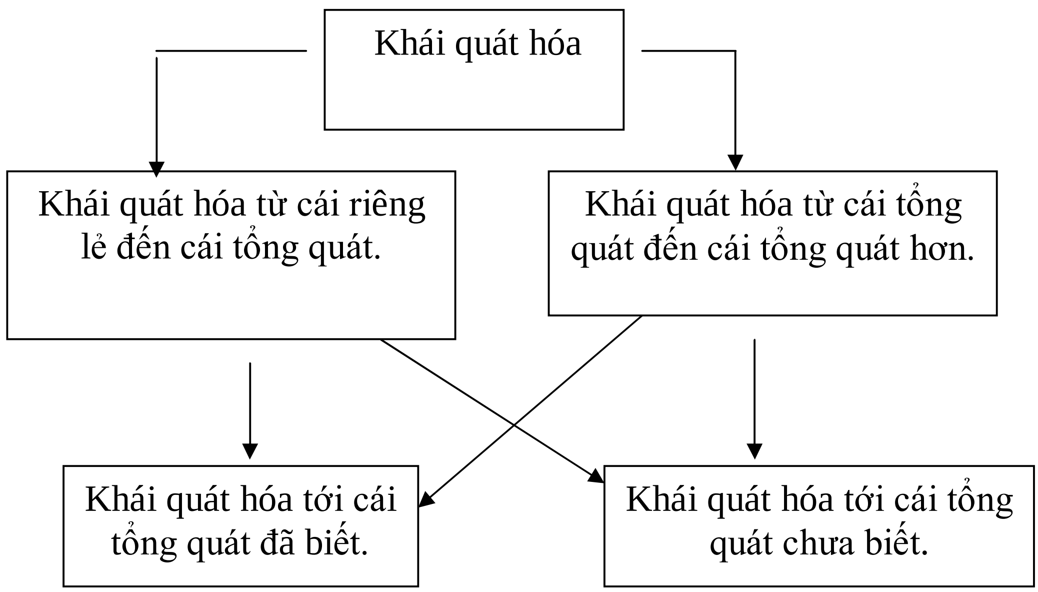
Việc chuyển đổi bài toán giúp ta giải quyết nhiều bài toán dễ dàng hơn, đơn giản đơn. Nhưng cần giúp học sinh ý thức được sự chuyển đổi đó phải đúng và đầy đủ, vì nhiều học sinh mắc phải sai lầm do không có khả năng huy động những kiến thức về lý thuyết mệnh đề hoặc huy động không đúng cách.

1.1.2.2 Năng lực khái quát hóa

Theo tác giả Nguyễn Bá Kim: "Khái quát hóa là chuyển từ một tập hợp đối tượng sang một tập hợp lớn hơn chứa tập hợp ban đầu bằng cách nêu bật một số đặc điểm chung của các phần tử trong tập hợp xuất phát ".

Theo G.Polia: “Khái quát hóa là chuyển từ việc nghiên cứu một tập hợp đối tượng đã cho đến việc nghiên cứu một tập hợp lớn hơn, bao gồm cả tập hợp ban đầu”.

Trong các năng lực trí tuệ thì năng lực khái quát hóa tài liệu toán học là thành phần cơ bản nhất của năng lực toán học, điều này đã được các nhà sư phạm, nhà Toán học như: V. A. Krutecxki, A. I .Marcusêvich, Pellery, tổ chức quốc tế UNESCO,... khẳng định trong sơ đồ cấu trúc năng lực toán học của mình. Theo tác giả Nguyễn Bá Kim trong Nghiên cứu giáo dục số 5/1982 thì những dạng khái quát thường gặp trong môn toán được biểu diễn bằng sơ đồ sau:



Trong môn toán trung học phổ thông có nhiều tình huống liên quan đến hoạt động khái quát hóa.

Ví dụ 1.5: Giải phương trình: $\sqrt{x^2-2x-3}=-2(x^2-2x)+9$ (1)

Điều kiện: $x^2-2x-3\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\leq -1 \\ x\geq 3 \end{array}\right.$

- Mới nhìn học sinh không khỏi ái ngại trước hình thức của bài toán, phương trình nếu bình phương hai vế sẽ xuất hiện phương trình bậc 4, không phải dạng phương trình quen thuộc (không có cách giải tổng quát).

- Hướng dẫn học sinh từng bước cách giải bài toán bằng hệ thống câu hỏi nhằm huy động kiến thức của học sinh.

+ Hãy nhận xét mối quan hệ giữa biểu thức trong căn và biểu thức chứa ẩn ngoài căn?

+ Có thể đưa (1) về dạng phương trình bậc hai bằng cách nào?(đặt ẩn phụ t)

+ Khi đó, t có điều kiện gì?

Lời giải

Đặt $t=\sqrt{x^2-2x-3}$, Điều kiện: $t\geq 0$

Khi đó (1) trở thành: $2t^2+t-3=0$ (*) $\left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện ta được $t=1$.

Với $t=1$

$(1)\Leftrightarrow\sqrt{x^2-2x-3}=1\Leftrightarrow x^2-2x-3=1\Leftrightarrow x^2-2x-4=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=1+\sqrt{5} \\ x=1-\sqrt{5} \end{array}\right.$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy phương trình có hai nghiệm: $x=1+\sqrt{5}; x=1-\sqrt{5}$.

Từ bài toán trên, hãy khái quát hóa các bước giải phương trình bằng cách đặt ẩn phụ?

(Giải phương trình bằng cách đặt ẩn phụ, gồm các bước:

+ Tìm tập xác định.

+ Đặt ẩn phụ (kèm điều kiện), đưa phương trình ban đầu về phương trình với ẩn số phụ.

+ Giải phương trình với ẩn số phụ và đối chiếu với điều kiện.

+ Quay trở lại với phép đặt, giải phương trình ẩn x, lấy nghiệm trong tập xác định).

Với bài toán này, giáo viên hướng dẫn học sinh sử dụng cách khái quát hóa từ ví dụ cụ thể, từ đó rút ra phương pháp chung để giải phương trình chứa ẩn dưới dấu căn bằng phương pháp đặt ẩn phụ.

Ví dụ 1.6: Giải phương trình: $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)=9$

Ở bài toán này, chắc chắn ý định của học sinh là khai triển vế trái, biến đổi đưa phương trình về dạng: $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0\ (a\neq 0)$, rồi thực hiện giải. Như vậy học sinh sẽ gặp nhiều khó khăn, vì học sinh mới chỉ học cách giải phương trình trùng phương.

- Hãy nhận xét các hệ số có mặt trong các thừa số ở vế trái? $(1+7=3+5=8)$
- Hãy đưa ra cách biến đổi thích hợp để các biểu thức gần nhau hơn?

Ở vế trái, ghép các thừa số thứ nhất với thừa số thứ tư, thừa số thứ hai với thừa số thứ ba, ta được: $(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)=9$

- Quan sát các thừa số ở vế trái và đưa ra cách làm?

Đặt $t=x^2+8x$, Điều kiện: $t\geq -16$, phương trình trở thành:

$$(t+7)(t+15)=9 \Leftrightarrow t^2+22t+96=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-16 \\ t=-6 \end{array}\right.$$

- Hãy tiếp tục tìm x?

Với $t=-6$, ta được: $x^2+8x+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-4-\sqrt{10} \\ x=-4+\sqrt{10} \end{array}\right.$

Với $t=-16$, ta được: $x^2+8x+16=0 \Leftrightarrow x=-4$

Vậy phương trình có nghiệm: $x=-4-\sqrt{10}; x=-4+\sqrt{10}; x=-4$

Bằng việc khái quát hóa các số cụ thể, yêu cầu học sinh đề xuất bài toán tổng quát và xây dựng cách giải dạng toán này?

Bài toán tổng quát: $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=e$

Với giả thiết: $a+d=b+c=\alpha$

Cách giải:

$(1) \Leftrightarrow [(x+a)(x+d)][(x+b)(x+c)] = e$

$\Leftrightarrow [x^2 + (a+d)x + ad][x^2 + (b+c)x + bc] = e$

$\Leftrightarrow (x^2 + \alpha x + ad)(x^2 + \alpha x + bc) = e$

Đặt $t = x^2 + \alpha x$ (vì $x^2 + \alpha x = (x + \frac{\alpha}{2})^2 - \frac{\alpha^2}{4} \geq -\frac{\alpha^2}{4}$ nên điều kiện là: $t \geq -\frac{\alpha^2}{4}$

Khi đó: $(1) \Leftrightarrow (t+ad)(t+bc) = e$ (Đây là phương trình bậc hai quen thuộc đã biết cách giải).

Lớp các bài toán có thể tổng quát từ bài toán cụ thể, từ đó xây dựng cách giải tương ứng cho dạng toán đó là đa dạng và phong phú. Giáo viên cần khích lệ học sinh tìm tòi, khám phá, giúp họ lĩnh kiến thức mọt cách chủ động, sáng tạo.

1.1.2.3 Năng lực tương tự hóa

Tương tự là một kiểu giống nhau nào đó. Tùy từng trường hợp cụ thể mà ta có thể thấy vấn đề ta đang xét giống với một vấn đề khác về một khía cạnh nào đó. Vì thế sự tương tự có ý nghĩa tương đối. Khi giải một bài toán, nếu nhớ lại được cách giải một bài toán tương tự thì có thể nhanh chóng tìm được cách giải bài toán đang xét.

Trong nghiên cứu khoa học, sự tương tự nhiều khi còn là một công cụ phát triển của khoa học và như vậy sự tương tự cũng là một công cụ phát triển tư duy.

Trong chương trình môn Toán ở trường phổ thông có rất nhiều sự tương tự trong các tình huống. Vì vậy, giáo viên cần phải khai thác được các yếu tố này để tạo tình huống dạy học phù hợp, giúp người học dần thích nghi và giải quyết tốt các tình huống từ nền tảng kiến thức đã có. Đồng thời, giáo viên tạo ra các tình huống chứa đựng các chướng ngại mà học sinh dễ mắc phải giữa các tri thức mới và tri thức đã có, giúp người học khắc sâu kiến thức cần chiếm lĩnh. Hơn thế, trong giảng dạy giáo viên cần làm cho học sinh nhớ được cách giải những bài toán dạng mẫu cũng giúp họ có thể giải được những bài tương tự nhưng khó hơn và do đó giúp họ phát triển tư duy.

Tương tự là nguồn gốc của nhiều phát minh. Bên cạnh đó cũng giống như khái quát hóa, tương tự thuộc về những suy luận có lý, do đó cần lưu ý với học sinh những kết luận rút ra từ tương tự có thể dẫn đến những kết luận sai.

Ví dụ 1.7: Sau khi đã đặt ra bài toán về giải phương trình chứa ẩn dưới dấu căn thức và học sinh đã nêu được các bước cụ thể để giải phương trình bằng phương pháp đặt ẩn phụ, giáo viên có thể ra các dạng bài tập tương tự để học sinh áp dụng.

Chẳng hạn: Giải phương trình sau bằng phương pháp đặt ẩn phụ:

$$\sqrt{2x^2-3x+1}=3(2x^2-3x)-1 \ (1)$$

Bằng cách áp dụng các bước đã nêu trên, ta có:

Lời giải:

Tập xác định: $2x^2-3x+1\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\leq \frac{1}{2} \\ x\geq 1\end{array}\right.$

$(1)\Leftrightarrow \sqrt{2x^2-3x-1}=3(\sqrt{2x^2-3x+1})^2-4$

Đặt $t=\sqrt{2x^2-3x+1}$; điều kiện $t\geq 0$.

Khi đó (1) trở thành: $t=3t^2-4\Leftrightarrow 3t^2-t-4=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=\frac{4}{3}\end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện, ta được: $t=\dfrac{4}{3}$

Với $t=\dfrac{4}{3}$, ta có: $18x^2-27x-7=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{27+3\sqrt{137}}{36} \\ x=\dfrac{27-3\sqrt{137}}{36}\end{array}\right.$ (thỏa điều kiện)

Vậy phương trình có hai nghiệm: $x=\dfrac{27+3\sqrt{137}}{36}; x=\dfrac{27-3\sqrt{137}}{36}$.

Ví dụ 1.8: Giải và biện luận theo *m*:

a. $mx^2+6=4x+3$

b. $(m-2)x^2-2(m+1)x+m=0$

Nếu học sinh có thể huy động kiến thức về giải phương trình dạng: $ax+b=0$ và $ax^2+bx+c=0$ rồi tiến hành giải hoàn toàn tương tự, tính toán đúng chắc chắn cho kết quả đúng, không cần phải suy luận, tư duy nhiều.

1.1.2.4 Năng lực qui lạ về quen

Rõ ràng, năng lực qui lạ về quen rất quan trọng trong việc giải toán của học sinh, vì rằng nếu thiếu kỹ năng này thì học sinh thường không biết làm gì để giải quyết bài toán đặt ra. Thực tiễn cho thấy năng lực giải toán của học sinh phụ thuộc rất lớn vào kỹ năng quy lạ về quen này. Để rèn luyện kỹ năng này cho học sinh, giáo viên nên lựa chọn các bài toán được xây dựng từ các bài toán gốc hoặc bài toán cơ bản nhằm tạo hoạt động để học sinh liên tưởng và huy động kiến thức để giải quyết vấn đề đặt ra.

Ví dụ 1.9: Sau khi học bài phương trình bậc hai một ẩn, giáo viên yêu cầu học sinh nêu cách giải phương trình trùng phương: $ax^4+bx^2+c=0$?

Đối với phương trình này, những học sinh có năng lực bình thường cũng phát biểu được đặt ẩn phụ là $t=x^2$ để quy về phương trình bậc hai đối với ẩn t.

Ví dụ 1.10: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x-y-1=0 \\ (x+y-2)(x-2y+1)=0 \end{cases}$

Lần lượt từng bước hướng dẫn học sinh chuyển đổi bài toán cần giải về dạng quen thuộc đã biết cách giải, cụ thể như sau:

- Bằng cách huy động kiến thức đã học, hãy cho biết phương trình thứ hai là dạng phương trình gì đã học và cách giải như thế nào?

Phương trình thứ hai là dạng phương trình tích, cách giải như sau:

$$(x+y-2)(x-2y+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y-2=0 \\ x-2y+1=0 \end{array}\right.$$

- Do đó, hệ đã cho tương đương với những hệ nào?

Hệ đã cho tương đương với hai hệ:

(I) $\begin{cases} x-y-1=0 \\ x+y-2=0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x-y-1=0 \\ x-2y+1=0 \end{cases}$ (II)

- Tới đây đã trở về dạng hệ phương trình bậc nhất hai ẩn quen thuộc, bằng cách huy động kiến thức đã học, chúng ta có thể giải bằng phương pháp cộng hoặc phương pháp thế.

Giải (I). Cộng vế với vế hai phương trình, ta được: $2x-3=0$

Suy ra: $\begin{cases} x=\dfrac{3}{2} \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Giải (II).

(II) $\Leftrightarrow \begin{cases} x=y+1 \\ y-1-2y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$

Vậy hệ có nghiệm: $(\frac{3}{2};\frac{1}{2});(3;2)$.

1.1.3 Vai trò và sự cần thiết phải rèn luyện năng lực huy động kiến thức trong dạy học Toán

Kiến thức mà chúng ta đã học được có thể rất nhiều, chúng ở trong trí nhớ của ta và kinh nghiệm đúc kết được có thể cũng lắm. Nhưng khi phải tìm hiểu, học hỏi một điều mới mẻ hoặc phải giải một bài tập, thì cần phải biết cách huy động những kiến thức và kinh nghiệm một cách thích hợp. Muốn vậy, ta phải biết hồi tưởng lại những kiến thức liên quan hay cách giải những bài tập tương tự. Nếu chúng ta đã có một quá trình học tập với phong cách thường xuyên rút kinh nghiệm thì quá trình huy động kiến thức càng mau lẹ và những kiến thức được huy động là những kiến thức thực sự cần thiết.

Năng lực huy động kiến thức không phải là điều bất biến, một bài toán nếu đặt vào thời điểm này có thể không giải được, hoặc giải được, chứng minh được một cách rất máy móc, dài dòng, nhưng đặt trong thời điểm khác (có thể không xa lắm), nếu có năng lực huy động kiến thức tốt, học sinh có thể giải quyết vấn đề một cách rất độc đáo, hay.

Theo Pôlya, để huy động kiến thức thì phải biết cách:

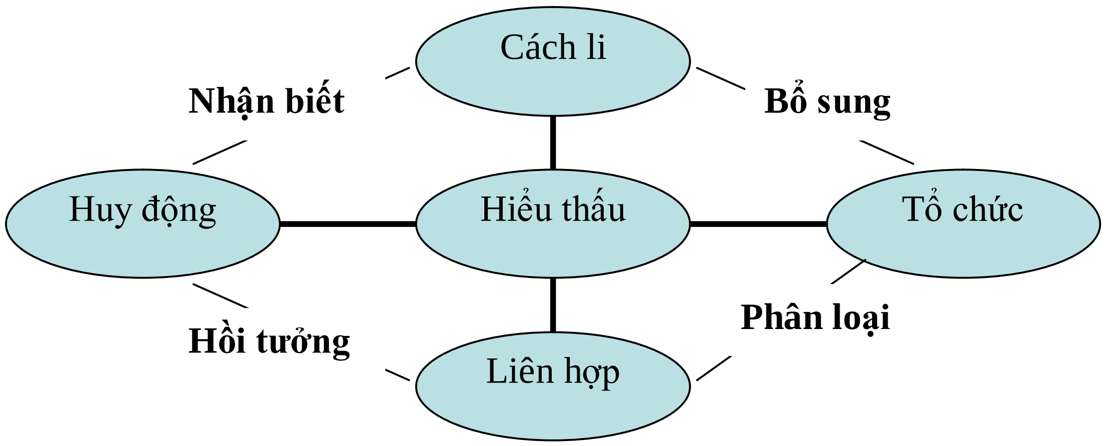
- Khoanh vùng kiến thức tương ứng với điều mới mẻ hay bài tập đang quan tâm.

- Nhận biết được điều mới mẻ ấy liên quan đến những khái niệm, tính chất hay định lí nào, bài toán ấy thuộc dạng nào hoặc có liên quan đến một dạng bài tập nào đã biết.

- Hồi tưởng lại những khái niệm, tính chất, định lí hay những dạng bài tập tương tự và phương pháp giải chúng.

- Bổ sung thêm một vài yếu tố nào đó để hiểu rõ hơn con đường đi tới điều mới mẻ hoặc hiểu rõ hơn quy trình giải bài toán.

Mối liên hệ mật thiết giữa những biện pháp trên được Pôlya mô tả bằng biểu đồ sau:



Ví dụ 1.11: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy = 12 \\ yz = 20 \\ zx = 15 \end{cases}$

- Khoanh vùng: Bài toán thuộc vùng kiến thức giải phương trình bậc hai.

- Cách li: Nhận xét những đặc điểm của mỗi phương trình trong hệ.

- Hồi tưởng: Nếu vế trái của mỗi phương trình là một tổng thì ta đã biết cách giải. Có thể áp dụng một cách tương tự nào vào hệ phương trình đã cho không?

- Liên kết: Việc nhân vào hai vế của một phương trình với những số có thể làm cho phương trình mới sinh ra những nghiệm ngoại lai. Vậy ở đây việc nhân vế với vế của các phương trình có xuất hiện ngoại lai không?

Lời giải

Rõ ràng nếu $(x;y;z)$ là nghiệm của hệ thì x,y,z đều khác 0.

Nhân vế với vế của ba phương trình ta được: $\begin{cases}(xyz)^2=3600\\ yz=20\\ zx=15\end{cases}$

Hệ này tương đương với hai hệ : (II) $\begin{cases}xyz=60\\ yz=20\\ zx=15\end{cases}$ (III) $\begin{cases}xyz=-60\\ yz=20\\ zx=15\end{cases}$

Giải (II). Lấy phương trình thứ nhất chia vế với vế cho $x=3, y=4, z=5$. Hệ có nghiệm $(3;4;5)$

Giải (III).Tương tự tìm được nghiệm $(-3;-4;-5)$.

Như vậy nếu biết huy động kiến thức cộng năng lực giải quyết vấn đề tốt thì cách giải sẽ gọn gàng hơn nhiều. Học sinh mà liên tưởng kém thì bài toán sẽ trở nên khó khăn hoặc là giải rất dài dòng. Trong quá trình giải một bài toán cụ thể nào đó, người giải chỉ cần sử dụng một phần kiến thức mà mình đã có. Cần sử dụng kiến thức nào, cần xem xét những mối liên hệ nào điều đó phụ thuộc vào khả năng chọn lọc của người giải. Do vậy việc thu nhận, lưu trữ kiến thức một cách khoa học cũng là một yếu tố quan trọng cho việc huy động kiến thức, mỗi một dạng toán, một đơn vị kiến thức nếu biết cách sắp xếp theo một trật tự thích hợp như chúng ta phân loại sách trên giá thì khi cần đến có thể dễ dàng huy động nó.

Trong các thành phần của cấu trúc năng lực toán học, cần thiết phải rèn luyện cho học sinh năng lực liên tưởng, năng lực huy động kiến thức và đặc biệt là ứng dụng kiến thức vào giải quyết các bài toán.Việc rèn luyện các năng lực cũng như huy động kiến thức làm sao cho đúng mà hiệu quả là việc làm thường xuyên của giáo viên đối với học sinh hoặc chính bản thân học sinh.

Khi bồi dưỡng năng lực huy động kiến thức cần yêu cầu các em phải tìm và hiểu sâu sắc kiến thức cội nguồn của vấn đề. Việc làm này vừa có tác dụng củng cố, vừa có tác dụng kiểm tra khả năng tư duy của học sinh để trong trường hợp nếu hiểu sai bản chất sẽ được uốn nắn và bổ sung kịp thời.

Ví dụ 1.12: Giải phương trình: $\sqrt{x+1} = x-1$ (1)

Ta có điều kiện của phương trình là $x \geq -1$

(1) $\Leftrightarrow x+1=(x-1)^2 \Leftrightarrow x+1=x^2-2x+1 \Leftrightarrow x^2-3x=0 \Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=3$

(thỏa điều kiện)

Vậy phương trình có hai nghiệm $x=0$ và $x=3$

Lời giải trên sai vì đã làm xuất hiện nghiệm ngoại lai; $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình (vì nói chung phép bình phương hai vế của một phương trình không phải bao giờ cũng là phép biến đổi tương đương).

Cái sai ở đây là tri thức cội nguồn nắm không vững hoặc đôi khi hiểu một cách máy móc, áp dụng vấn đề không linh hoạt cũng dẫn đến việc huy động kiến thức sai.

Huy động kiến thức là một trong những nhân tố quan trọng của hoạt động toán học nó giải quyết những mâu thuẫn trong quá trình giải toán cũng như những nhu cầu của toán học. Việc bồi dưỡng năng lực huy động kiến thức là nhiệm vụ quan trọng trong dạy học toán. Nó đóng góp vào quá trình đổi mới phương pháp dạy học hiện nay.

Huy động kiến thức có thể xem là một chuỗi các hoạt động như: hoạt động lựa chọn các công cụ thích hợp, hoạt động dự đoán vấn đề, hoạt động qui lạ về quen nhờ biến đổi đối tượng, hoạt động chuyển đổi ngôn ngữ. Nếu thành thạo các hoạt động này chính là đã làm tốt năng lực huy động kiến thức học sinh sẽ hiểu sâu sắc kiến thức toán học ở trường phổ thông, thấy được mối quan hệ biện chứng giữa những nội dung kiến thức của từng chương, mục trong sách giáo khoa, đóng góp vào sự phát triển tư duy logic, tư duy biện chứng, khả năng kiến tạo tri thức cho bản thân.

1.2 Nội dung, đặc điểm chủ đề phương trình - hệ phương trình trong chương trình Đại số 10, ban cơ bản

1.2.1 Đặc điểm chủ đề phương trình – hệ phương trình trong chương trình Đại số 10, ban cơ bản

Khái niệm phương trình đã được hình thành từ các lớp bậc trung học cơ sở. Xuất phát từ khái niệm đa thức một biến (Toán 7), trong Toán 8 bắt đầu có khái niệm phương trình một ẩn, chủ yếu là phương trình bậc nhất. Các khái niệm phương trình bậc hai một ẩn, hệ phương trình bậc nhất hai ẩn được trình bài trong Toán 9.

Chương III Đại số 10 theo chương trình giáo dục trung học phổ thông môn Toán hệ thống lại những vấn đề học sinh đã học ở bậc trung học cơ sở và bổ sung thêm cho hoàn chỉnh một số vấn đề sau:

- Cách giải một số phương trình quy về phương trình bậc nhất, bậc hai.
- Cách giải hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn, dựa trên các ví dụ.
- Cách giải phương trình bậc hai, hệ phương trình bậc nhất hai ẩn, hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn bằng máy tính bỏ túi.

1.2.2 Nội dung chủ đề phương trình – hệ phương trình trong chương trình Đại số 10, ban cơ bản

- Dạy học khái niệm phương trình và những khái niệm có liên quan.
- Dạy học phương trình dựa vào hàm mệnh đề: quan hệ về đẳng thức; hiểu đúng thực chất của dấu bằng trong phương trình (hình thức), phân biệt dấu bằng trong phương trình và dấu bằng trong biến đổi đồng nhất; điều kiện xác định và nghiệm phương trình.
- Sử dụng ngôn ngữ của lí thuyết tập hợp và logic toán (biến đổi tương đương, hệ quả, kết hợp nghiệm,...)
- Dạy học giải phương trình.

- Diễn biến của tập nghiệm khi biến đổi phương trình: mở rộng, thu hẹp, tương đương.
- Giải quyết phương diện ngữ nghĩa (xem xét nội dung của những mệnh đề toán học và nghĩa của những cách đặt vấn đề toán học) và phương diện cú pháp (xem xét cấu trúc hình thức và sự biến đổi hình thức những biểu thức toán học, sự làm việc theo những quy tắc xác định, theo thuật giải).
- Dạy học giải bài toán bằng cách lập phương trình.
- Thấy được ứng dụng của toán học trong thực tế và việc toán học hóa các bài toán có nội dung thực tiễn.
- Phát hiện quan hệ giữa các đại lượng.
- Kĩ năng giải bài toán, trọng tâm là kĩ năng lập và giải phương trình.

1.3 Thực trạng về bồi dưỡng năng lực huy động kiến thức cho học sinh trong dạy học ở một số trường trung học phổ thông

1.3.1 Đối tượng khảo sát

Để tìm hiểu thực trạng dạy học phương trình, hệ phương trình cũng như việc tổ chức dạy học theo phương pháp nhằm bồi dưỡng năng lực huy động kiến thức cho học sinh ở trường trung học phổ thông hiện nay tôi đã tiến hành khảo sát các giáo viên và học sinh các lớp 10CB1, 10CB4 của trường trung học phổ thông Lấp Vò 2. Hình thức khảo sát chủ yếu là lập phiếu khảo sát dành cho giáo viên và học sinh, ngoài ra tôi cũng có trực tiếp trao đổi, phỏng vấn với giáo viên.

1.3.2 Mục đích khảo sát

Tìm hiểu về phương pháp và cách thức tổ chức hoạt động nhằm bồi dưỡng năng lực huy động kiến thức trong dạy học chủ đề phương trình, hệ phương trình trong đại số 10, ban cơ bản.

1.3.3 Kết quả khảo sát

1.3.3.1 Kết quả khảo sát dành cho giáo viên

Câu 1: Khi dạy học chủ đề phương trình – hệ phương trình Thầy (Cô) có quan tâm đến việc tổ chức các hoạt động nhằm bồi dưỡng năng lực huy động kiến thức cho học sinh không?

Tổng số phiếu	Nội dung	Số giáo viên chọn	Tỉ lệ (%)
7	a. Thường xuyên quan tâm	7	100
	b. Ít quan tâm	0	0
	c. Chưa quan tâm	0	0
	d. Không quan tâm	0	0

Câu 2: Thầy (Cô) nhận thấy tầm quan trọng của việc tổ chức dạy học nhằm bồi dưỡng năng lực huy động kiến thức cho học sinh là như thế nào ?

Tổng số phiếu	Nội dung	Số GV chọn	Tỉ lệ (%)
7	a. Rất quan trọng	2	28.6
	b. Quan trọng	5	71.4
	c. Không quan trọng	0	0

Câu 3: Cách thức mà Thầy (Cô) tổ chức hoạt động nhằm bồi dưỡng năng lực huy động kiến thức cho học sinh là gì?

Tổng số phiếu	Nội dung	Số giáo viên chọn	Tỉ lệ (%)
7	a. Tổ chức theo nhóm	1	14.3
	b. Tổ chức theo cá nhân	1	14.3
	c. Cả hai cách	5	71.4

	thức trên		

Câu 4: Thầy (Cô) đánh giá như thế nào về mức độ tham gia vào việc học tập theo phương pháp dạy học nhằm bồi dưỡng năng lực huy động kiến thức mà Thầy (Cô) đã sử dụng trong khi dạy học ?

Tổng số phiếu	Nội dung	Số giáo viên chọn	Tỉ lệ (%)
7	a. Tất cả học sinh đều tham gia	0	0
	b. Đa số học sinh tham gia	5	71.4
	c. Rất ít học sinh tham gia	1	14.3
	d. Học sinh không tham gia	1	14.3

Câu 5: Thầy (Cô) thường tổ chức cho học sinh huy động kiến thức dưới hình thức nào?

Tổng số phiếu	Nội dung	Số giáo viên chọn	Tỉ lệ (%)
7	a. Học lí thuyết	0	0
	b. Làm bài tập	0	0
	c. Cả hai hình thức trên	7	100

Câu 6: Thầy (Cô) đánh giá như thế nào về hiệu quả khi tổ chức các hoạt động nhằm bồi dưỡng năng lực huy động kiến thức cho học sinh?

Tổng số	Nội dung	Số giáo viên chọn	Tỉ lệ (%)

phiếu			
7	a. Rất hiệu quả	1	14.3
	b. Hiệu quả	4	57.1
	c. Tương đối hiệu quả	2	28.6
	d. Không hiệu quả	0	0

Câu 7: Phương trình – hệ phương trình là nội dung quan trọng thường xuất hiện trong các kì thi quan trọng nên giáo viên thường dạy kĩ, đầu tư nhiều vào nội dung này.

Tổng số phiếu	Nội dung	Số giáo viên chọn	Tỉ lệ (%)
7	a. Rất đồng ý	7	100
	b. Đồng ý	0	0
	d. Không đồng ý	0	0

Câu 8: Dạy học theo phương pháp nhằm giúp học sinh bồi dưỡng năng lực huy động kiến thức đối với nội dung phương trình – hệ phương trình sẽ mất nhiều thời gian.

Tổng số phiếu	Nội dung	Số giáo viên chọn	Tỉ lệ (%)
7	a. Rất đồng ý	2	28.6
	b. Đồng ý	2	28.6
	d. Không đồng ý	3	42.8

Câu 9: Có ý kiến cho rằng khi dạy học chủ đề phương trình – hệ phương trình giáo viên nên dạy giáp án điện tử thì sẽ giúp học sinh dễ hiểu và hứng thú trong học tập.

Tổng số phiếu	Nội dung	Số giáo viên	Tỉ lệ (%)

		chọn	
7	a. Rất đồng ý	1	14.3
	b. Đồng ý	1	14.3
	d. Không đồng ý	5	71.4

1.3.3.2 Kết quả khảo sát dành cho học sinh

Câu 1: Em có thích học toán phương trình – hệ phương trình không?

Tổng số phiếu	Nội dung	Số học sinh chọn	Tỉ lệ (%)
71	a. Thích	52	73.2
	b. Không thích	15	21.1
	c. Chưa thích	4	5.7

Câu 2: Các phương pháp giải phương trình – hệ phương trình rất khó học và khó nhớ.

Tổng số phiếu	Nội dung	Số học sinh chọn	Tỉ lệ (%)
71	a. Rất đồng ý	15	21.1
	b. Đồng ý	35	49.3
	c. Chưa đồng ý	14	19.7
	d. Không đồng ý	7	9.9

Câu 3: Trong quá trình dạy học nội dung phương trình – hệ phương trình sự tiếp xúc giữa giáo viên và học sinh là rất thường xuyên.

Tổng số phiếu	Nội dung	Số học sinh chọn	Tỉ lệ (%)
71	a. Rất đồng ý	17	23.9
	b. Đồng ý	47	66.2
	c. Chưa đồng ý	2	2.8
	d. Không đồng ý	5	7.1

Câu 4: Đối với nội dung phương trình – hệ phương trình em thích học theo cách thức nào?

Tổng số phiếu	Nội dung	Số học sinh chọn	Tỉ lệ (%)
71	a. Học theo nhóm	21	29.6
	b. Cá nhân	10	14.2
	c. Tùy từng nội dung	40	56.2

Câu 5: Em thích thú với phương pháp học tập theo phương pháp dạy học nhằm bồi dưỡng năng lực huy động kiến thức mà giáo viên đưa ra không?

Tổng số phiếu	Nội dung	Số học sinh chọn	Tỉ lệ (%)
71	a. Thích	50	70.4
	b. Không thích	15	21.1
	c. Chưa thích	6	8.5

Câu 6: Em thấy việc học toán phương trình – hệ phương trình có quan trọng không?

Tổng số phiếu	Nội dung	Số học sinh chọn	Tỉ lệ (%)
71	a. Rất quan trọng	19	26.8
	b. Quan trọng	50	70.4
	c. Không quan trọng	2	2.8

Câu 7: Có ý kiến cho rằng để học tốt toán hệ phương trình cần học tốt toán phương trình.

Tổng số phiếu	Nội dung	Số học sinh chọn	Tỉ lệ (%)
71	a. Rất đồng ý	10	14.1
	b. Đồng ý	42	59.2
	c. Chưa đồng ý	10	14.2
	d. Không đồng ý	9	12.5

Câu 8: Để giúp các em đưa phương trình - hệ phương trình về dạng quen thuộc giáo viên thường áp dụng phương pháp dạy học huy động kiến thức của học sinh.

Tổng số phiếu	Nội dung	Số học sinh chọn	Tỉ lệ (%)
71	a. Rất đồng ý	15	21.1
	b. Đồng ý	55	77.5
	c. Chưa đồng ý	1	1.4
	d. Không đồng ý	0	0

Câu 9: Toán về phương trình – hệ phương trình có nhiều ứng dụng trong thực tiễn.

Tổng số phiếu	Nội dung	Số học sinh chọn	Tỉ lệ (%)
71	a. Rất đồng ý	18	25.4
	b. Đồng ý	45	63.4
	c. Chưa đồng ý	6	8.5
	d. Không đồng ý	2	2.7

Câu 10: Sử dụng máy tính bỏ túi để tính toán phương trình – hệ phương trình sẽ nhanh hơn.

Tổng số phiếu	Nội dung	Số học sinh chọn	Tỉ lệ (%)
71	a. Rất đồng ý	15	21.1
	b. Đồng ý	50	70.4
	c. Chưa đồng ý	6	8.5
	d. Không đồng ý	0	0

1.3.4. Kết luận

- *Về phía GV:* Giáo viên đánh giá cao tầm quan trọng của việc tổ chức dạy học chủ đề phương trình – hệ phương trình theo định hướng nhằm bồi dưỡng năng lực huy động kiến thức cho học sinh. Giáo viên xem học sinh là trung tâm của quá trình dạy học. Các hình thức mà giáo viên thường tổ chức cho học sinh huy động kiến thức là học lí thuyết và làm bài tập. Giáo viên luôn thay đổi phương pháp dạy học theo hướng tích cực để phù hợp với hoạt động học tập giúp học sinh tiếp thu kiến thức một cách dễ dàng và triệt để. Tuy nhiên hiệu quả của việc dạy học theo định hướng này là chưa cao do một số nguyên nhân như: tỉ lệ học sinh tham gia còn chưa cao, việc tổ chức học tập theo phương pháp này mất nhiều thời gian hơn do đó mà một số giáo viên cũng còn ngần ngại khi tổ chức dạy học theo phương pháp này. Trong quá trình giải phương trình, một số giáo viên còn cung cấp lời giải mẫu cho học sinh dưới dạng mặc định, từ đó các em không có khả năng huy động kiến thức.

- *Về phía HS:* Tuy là giáo viên có lưu tâm đến việc tổ chức dạy học theo phương pháp nhằm bồi dưỡng năng lực huy động kiến thức cho học sinh nhưng việc tổ chức này còn diễn ra chưa nhiều. Đối với những học sinh khá giỏi thì các em có hứng thú khi học tập theo phương pháp này tuy nhiên vẫn còn một phần học sinh còn có thái độ học tập không đúng đắn, các em không chịu suy nghĩ thì lại không thích học theo phương pháp này. Do đó mà sự tham gia của học sinh cũng chưa đạt đến mức độ tuyệt đối. Học sinh còn gặp một số khó khăn khi học chương phương trình – hệ phương trình. Học sinh còn lười suy nghĩ, chưa tích cực tư duy hoạt động trí não tìm tòi phát hiện vấn đề và giải quyết vấn đề, tiếp thu kiến thức một cách thụ động nên dễ quên, không vận dụng linh hoạt, sáng tạo vào giải toán. Học sinh chưa có thói quen tư duy tìm tòi, sáng tạo, khai thác các vấn đề mới từ những cái đã biết, đã học.

Do đặc điểm của nội dung phương trình, hệ phương trình nên giáo viên chỉ quan tâm, chú ý đến việc dạy cho học sinh biết cách sử dụng các phép biến đổi một cách hình thức .Vì vậy trong quá trình giải bài tập, học sinh thường áp dụng các phép biến đổi một cách máy móc, hình thức.

Qua kết quả khảo sát, trao đổi cùng với giáo viên và học sinh ở trường Trung học phổ thông Lấp Vò 2 tôi rút ra được nhận xét rằng giáo viên nhận thấy tầm quan trọng của việc tổ chức các hoạt động nhằm giúp học sinh bồi dưỡng năng lực huy động kiến thức, việc tổ chức các hoạt động này cũng mang lại những hiệu quả đáng kể. Một bộ phận học sinh cũng yêu thích phương pháp học tập này. Dạy và học theo phương pháp này giúp học sinh phát triển được tư duy. Giáo viên luôn tạo điều kiện để học sinh học tập tốt. Tuy nhiên hình thức tổ chức hoạt động giúp học sinh năng lực huy động kiến thức còn chưa phù hợp, sự tham gia của các em chưa nhiều, một số cách tổ chức còn mang tính hình thức. Việc khảo sát chính là cơ sở để tôi đề ra một số biện pháp tích cực nhằm khắc phục những hạn chế này!

KẾT LUẬN CHƯƠNG 1

Để nâng cao chất lượng học tập môn toán cho học sinh ở trường phổ thông nói chung và học sinh lớp 10 ban cơ bản nói riêng thì một trong những yếu tố không thể thiếu được đó là việc bồi dưỡng năng lực huy động kiến thức đã có của học sinh. Điều đó được thể hiện qua khả năng giải bài tập toán, khả năng tiếp thu những khái niệm, định lí… khả năng vận dụng để kiến tạo kiến thức. Môi trường cho những hoạt động đó là việc xây dựng chuỗi những bài toán. Trong quá trình xây dựng đó chúng ta cần phải tạo cho các em niềm tin, tinh thần say mê, hứng thú học toán; tạo cho các em môi trường tư duy, đặt các em trong các tình huống cần phải động não để đạt được khả năng huy động kiến thức tốt nhất.

Trong chương 1, luận văn đã nêu lên được những quan niệm về năng lực, năng lực huy động kiến thức, các dạng biểu hiện cơ bản của năng lực. Bên cạnh đó, chương 1 cũng đã đề cập đến vai trò và thực trạng của việc rèn luyện và phát triển năng lực huy động kiến thức cho học sinh hiện nay.

Khi dạy học chủ đề phương trình, hệ phương trình học sinh gặp khó khăn chủ yếu là: Đứng trước bài toán cần dựa trên cơ sở nào để huy động kiến thức một cách đúng đắn. Để đáp ứng nhu cầu trên trong chương 2 tôi đưa ra một số biện pháp nhằm bồi dưỡng năng lực huy động kiến thức của học sinh trong dạy học chủ đề phương trình, hệ phương trình.

CHƯƠNG 2

CÁC BIỆN PHÁP CHỦ YẾU BỒI DƯỠNG NĂNG LỰC HUY ĐỘNG KIẾN THỨC CHO HỌC SINH LỚP 10, BAN CƠ BẢN TRONG DẠY HỌC CHỦ ĐỀ PHƯƠNG TRÌNH – HỆ PHƯƠNG TRÌNH

2.1 Các định hướng đề xuất biện pháp

Định hướng 1: Các biện pháp sư phạm được xây dựng phải dựa trên nền tảng tri thức chuẩn của sách giáo khoa Toán hiện hành.

Định hướng 2**:** Các biện pháp sư phạm cần đảm bảo tạo ra khó khăn đúng mức, nhằm làm cho học sinh được tham gia vào quá trình hình thành tri thức và kỹ năng.

Định hướng 3: Hệ thống các biện pháp phải đảm bảo sự kích thích hứng thú học tập, nhằm phát huy tính tích cực và năng lực trí tuệ của học sinh.

Định hướng 4**:** Các biện pháp sư phạm được đề xuất phải dựa trên vốn kiến thức của học sinh và việc huy động các kiến thức một cách hợp lí sẽ góp phần giải quyết các vấn đề Toán học.

Định hướng 5**:** Các biện pháp sư phạm được đề xuất phải đảm bảo tính khả thi và thông qua các biện pháp, học sinh phải thấy được vai trò của năng lực huy động kiến thức trong dạy học Toán.

Sau đây là một số các biện pháp sư phạm nhằm tăng cường năng lực huy động kiến thức của học sinh trong quá trình dạy học phương trình, hệ phương trình.

2.2 Các biện pháp bồi dưỡng năng lực huy động kiến thức cho học sinh thông qua dạy học chủ đề phương trình - hệ phương trình trong Đại số 10 cơ bản

2.2.1 Biện pháp 1: Thường xuyên củng cố kiến thức và rèn luyện kĩ năng giải các bài toán về phương trình, hệ phương trình cho học sinh

Nói đến huy động kiến thức tức là nói đến việc đưa những kiến thức đã biết vào vận dụng để giải quyết nhiệm vụ nhận thức trong các tình huống cụ thể. Điều này nói lên vai trò quan trọng của vốn kiến thức, kinh nghiệm của học sinh trong quá trình học tập và vận dụng kiến thức. Nếu không có những hiểu biết căn bản và vững chắc thì học sinh sẽ không thể suy nghĩ, không thể đưa ra được giải pháp hữu ích mỗi khi gặp tình huống cần giải quyết.Vì vậy, việc làm cho học sinh nắm vững các kiến thức và kĩ năng vừa là mục đích, vừa là điều kiện để dạy học có hiệu quả. Thông thường mỗi kiến thức học sinh thu nhận được trong quá trình học tập nếu không được sử dụng, củng cố sẽ nhanh chóng quên và khó phục hồi. Vì vậy việc thường xuyên củng cố, ôn tập, vận dụng kiến thức đã học cho học sinh là điều hết sức quan trọng. Mỗi khi dạy học một nội dung kiến thức nào đó nhất thiết phải ôn tập, củng cố các kiến thức đã học có liên quan. Việc làm này chính là tạo tiền đề xuất phát, tạo cơ sở vững chắc để học sinh kiến tạo kiến thức mới. Kiến thức môn toán có mối liên hệ lôgic, hệ thống nên không có nền tảng vững chắc học sinh sẽ không kiến tạo nên hiểu biết mới được. Mặt khác, theo quan điểm của thuyết tâm lí học liên tưởng, chính việc nhắc lại, việc củng cố kiến thức là cơ sở để các mối liên tưởng được thực hiện. Đây chính là cơ sở để việc huy động kiến thức diễn ra dễ dàng.

Ví dụ 2.1: Cho hai phương trình: $3x = 2$ và $2x = 3$

Cộng các vế tương ứng của hai phương trình đã cho. Hỏi:

a. Phương trình nhận được có tương đương với một trong hai phương trình đã cho hay không?

b. Phương trình đó có phải là phương trình hệ quả của một trong hai phương trình đã cho hay không?

Lời giải:

Cộng các vế tương ứng của hai phương trình đã cho ta được phương trình $5x=5$

Để trả lời được câu hỏi, giáo viên có thể yêu cầu học sinh nhắc lại khái niệm phương trình tương đương, phương trình hệ quả.

Từ đó có thể đi đến kết luận phương trình $5x=5$ không tương đương với phương trình nào trong hai phương trình đã cho và cũng không là hệ quả của một trong hai phương trình đó.

Qua ví dụ trên nhằm củng cố cho học sinh kiến thức về phép biến đổi phương trình tương đương, phương trình hệ quả.

Ví dụ 2.2: Giải phương trình: $(x^2-2x)^2-4(x^2-2x)+3=0$

Lời giải:

Đặt $t=x^2-2x$, lúc đó phương trình trở thành: $t^2-4t+3=0$

Giải ra được: $t=1$ và $t=3$. Khi đó:

Với $t=1$, ta có: $x^2-2x=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1+\sqrt{2} \\ x=1-\sqrt{2} \end{array}\right.$

Với $t=3$, ta có: $x^2-2x=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \end{array}\right.$

Vậy phương trình có bốn nghiệm là: $x=-1; x=3; x=1+\sqrt{2}; x=1-\sqrt{2}$

Bài toán tên là phương tiện để củng cố kiến thức, khắc sâu cách giải phương trình bằng cách đặt ẩn phụ để đưa về phương trình bậc hai quen thuộc.

Ví dụ 2.3: Giải phương trình: $\sqrt{2x-3}=x-2$ (1)

Lời giải:

Cách 1: Điều kiện của phương trình (1) là $x \geq \dfrac{3}{2}$

Bình phương hai vế của phương trình (1) ta đưa đến phương trình hệ quả:

$(1) \Rightarrow 2x-3 = x^2-4x+4 \Rightarrow x^2-6x+7=0$

Phương trình cuối có hai nghiệm là $x=3+\sqrt{2}$ và $x=3-\sqrt{2}$. Cả hai giá trị này đều thỏa mãn điều kiện của phương trình (1), nhưng khi thay vào phương trình (1) thì giá trị $x=3-\sqrt{2}$ bị loại (vế trái dương còn vế phải âm), còn giá trị $x=3+\sqrt{2}$ là nghiệm (hai vế cùng bằng $\sqrt{2}+1$)

Vậy nghiệm của phương trình (1) là $x=3+\sqrt{2}$.

Cách 2: Phương trình trên có dạng $f(x)=g(x)$. Đây là một dạng cơ bản của phương trình vô tỷ, thường được giải bằng phương pháp lũy thừa 2 vế.

Cách giải: $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = [g(x)]^2 \end{cases}$

Bài toán trên sẽ không dễ và có thể dẫn dến sai lầm đối với học sinh nếu không thường xuyên củng cố kiến thức về giải phương trình chứa ẩn dưới dấu căn bậc 2.

Ví dụ 2.4: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 0,4x-0,3y=0,6 \\ -0,3x-0,2y=-1,3 \end{cases}$

Lời giải:

Ta có:

$$\begin{cases} 0,4x-0,3y=0,6 \\ -0,3x-0,2y=-1,3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1,2x-0,9y=1,8 \\ -1,2x-0,8y=-5,2 \end{cases}$$

Cộng từng vế hai phương trình ta được: $-1,7y=-3,4 \Rightarrow y=2$

Thay $y=2$ vào một trong hai phương trình của hệ, ta được: $x=3$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(3;2)$.

Bài toán trên là phương tiện để củng cố kiến thức, khắc sâu cách giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn quen thuộc mà ở đây cụ thể là giải bằng phương pháp cộng.

Ngoài ra, việc rèn luyện kĩ năng giải toán cho học sinh cũng là một trong những yêu cầu cơ bản và cần thiết, giúp học sinh hiểu sâu sắc kiến thức toán, đồng thời bồi dưỡng năng lực huy động kiến thức và các phẩm chất trí tuệ, phát triển năng lực giải toán cho học sinh. Bao gồm các kĩ năng sau:

- Kĩ năng 1: Vận dụng phương trình, hệ phương trình dạng mẫu

Nhận dạng và giải thành thạo các phương trình, hệ phương trình dạng cơ bản. Chẳng hạn, khi học phương trình qui về phương trình bậc nhất, bậc hai thì cần rèn cho học sinh các kĩ năng sau:

+ Giải và biện luận thành thạo phương trình bậc nhất, phương trình bậc hai.

+ Giải được phương trình qui về bậc nhất, bậc hai: phương trình có ẩn ở mẫu số, phương trình có chứa dấu giá trị tuyệt đối, phương trình chứa căn, phương trình đưa về dạng tích.

Ví dụ 2.5: Khi học về "phương trình bậc hai", có thể yêu cầu học sinh theo các mức độ sau:

- Nhắc lại dạng và các bước giải phương trình bậc hai theo công thức nghiệm tổng quát (kĩ năng này cần huy động lại kiến thức về thuật toán giải phương trình bậc hai để trả lời).

- Thực hiện giải phương trình: $2x^4 - 7x^2 + 5 = 0$ (1)

Huy động kiến thức để tìm cách biến đổi phương trình (1) về phương trình dạng mẫu đã biết cách giải.

Đặt $t = x^2$, điều kiện: $t \geq 0$

Phương trình (1) trở thành: $2t^2 - 7t + 5 = 0$ (2)

Tới đây, phương trình (1) đã quay về dạng phương trình dạng mẫu đã biết cách giải (phương trình bậc hai).

Phương trình (2) có hai nghiệm là: $t = 1$ và $t = \frac{5}{2}$.

Ta thấy $t = 1$, $t = \frac{5}{2}$ thỏa mãn điều kiện.

* Với $t = 1$ ta có: $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

* Với $t = \frac{5}{2}$ ta có: $x^2 = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{10}}{2}$

Vậy phương trình có nghiệm là: $x=1; x=-1; x=\frac{\sqrt{10}}{2}; x=-\frac{\sqrt{10}}{2}$.

Mặc dù những kĩ năng này yêu cầu học sinh vận dụng khi giải phương trình, hệ phương trình theo dạng mẫu, đã có sẵn thuật giải nhưng giáo viên không được xem nhẹ việc rèn luyện kĩ năng này vì đây là kiến thức cơ bản, là nền tảng, là bài toán gốc để giải các bài toán ở mức độ cao hơn.

Bên cạnh việc rèn luyện cho học sinh áp dụng thành thạo kĩ năng vận dụng phương trình, hệ phương trình dạng mẫu, cần lựa chọn một số bài toán dựa vào sự phân tích đặc thù riêng có thể giải được bằng phương pháp riêng đơn giản hơn khi áp dụng giải theo qui tắc tổng quát nhằm huy động kiến thức của học sinh một cách triệt để.

Ví dụ 2.6:

- Khi học công thức giải phương trình bậc hai và sau khi cho học sinh luyện tập áp dụng công thức đó, ta cho học sinh giải phương trình:

$$(2+\sqrt{3})x^2+2(1+\sqrt{3})x+\sqrt{3}=0$$

Nhiều học sinh giải bằng cách tính $\Delta^{'}$ mà không dựa trên nhận xét $a-b+c=0$ nên $x=-1; x=-\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$

- Hay bài toán giải phương trình tích: $(x-\frac{2}{3})(3x+1)=0$

Có khi học sinh sẽ mở dấu ngoặc, đưa phương trình về dạng bậc hai rồi áp dụng công thức nghiệm mà không thấy ở đây là một phương trình tích $A.B=0$ thì $A=0$ hoặc $B=0$, để có ngay nghiệm $x=\frac{2}{3}; x=-\frac{1}{3}$

Những trường hợp như vậy nhằm khắc phục thói quen áp dụng công thức, không làm thay đổi phù hợp với điều kiện mới và rèn luyện tư duy linh hoạt ; giúp bồi dưỡng khả năng huy động kiến thức một cách triệt để.

Các yêu cầu cơ bản khi tiến hành rèn luyện cho học sinh kĩ năng vận dụng phương trình, hệ phương trình dạng mẫu đó là:

- Nắm vững qui tắc giải.

- Nhận dạng đúng bài toán có qui tắc giải xác định.
- Tiến hành giải bài toán theo qui tắc đã học.

Như vậy, nếu phương trình cho ở dạng mẫu mực, cơ bản học sinh chỉ cần nhận dạng, chọn cách giải ứng với mỗi dạng phương trình. Nhưng có những phương trình mới chỉ nhìn qua học sinh chưa nhìn ra dạng chuẩn mực thì cần biến đổi đơn giản đưa về dạng chuẩn mực đã học. Chẳng hạn như các bài toán phương trình qui về phương trình bậc nhất, bậc hai,..

Ví dụ 2.7: Giải phương trình: $|2x+1|=|4x-7|$

Mới nhìn qua bài toán này học sinh chưa nhìn thấy ngay dạng đã học, nhưng chỉ cần bình phương hai vế sẽ đưa về dạng phương trình bậc hai đã biết cách giải.

Lời giải:

Bình phương hai vế phương trình đã cho ta được phương trình tương đương

$$|2x+1|=|4x-7| \Leftrightarrow (2x+1)^2=(4x-7)^2 \Leftrightarrow 4x^2+4x+1=16x^2-56x+49$$

$$\Leftrightarrow 12x^2-60x+48=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=1 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm: $x=4; x=1$.

Ngoài ra, cần đưa ra những bài toán mà khi giải học sinh không chỉ cần vận dụng một dạng phương trình mẫu mà phải vận dụng kết hợp các dạng phương trình mẫu mới giải được, có như vậy mới giúp học sinh huy động kiến thức một cách triệt để.

***Ví dụ 2.8*:** Giải phương trình: $(x-3)\sqrt{x+2}=x^2-9$ (1)

Để giải phương trình này cần vận dụng cả cách giải phương trình tích, cả cách giải phương trình chứa ẩn dưới dấu căn, cụ thể như sau:

Lời giải:

Điều kiện: $x \geq -2$

Huy động kiến thức để đưa về phương trình dạng mẫu đã biết cách giải. Khi đó, ta có:

$(1) \Leftrightarrow (x-3)(\sqrt{x+2}-(x+3))=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-3=0 \\ \sqrt{x+2}=x+3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ \begin{cases} x\geq -3 \\ x^2+5x+7=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x=3$$

Ta thấy $x=3$ thỏa điều kiện.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=3$.

Ví dụ 2.9: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{3}{x-1}+\dfrac{5}{y+1}=4 \\ \dfrac{4}{x-1}-\dfrac{1}{y+1}=\dfrac{19}{5} \end{cases}$

Mới nhìn qua bài toán này học sinh chưa nhìn thấy ngay dạng đã học, nhưng chỉ cần đặt $X=\dfrac{1}{x-1};Y=\dfrac{1}{y+1}$, ta sẽ đưa về dạng hệ phương trình bậc nhất hai ẩn quen thuộc đã biết cách giải, cụ thể như sau:

Lời giải:

- Đặt $X=\dfrac{1}{x-1};Y=\dfrac{1}{y+1}$

Hệ đã cho trở thành: $\begin{cases} 3X+5Y=4 \\ 4X-Y=\dfrac{19}{5} \end{cases}$

Sử dụng phương pháp cộng hoặc phương pháp thế, ta được nghiệm

$(X;Y)=(1;\dfrac{1}{5})$.

Ta có: $\dfrac{1}{x-1}=1 \Leftrightarrow x=2$ và $\dfrac{1}{y+1}=\dfrac{1}{5} \Leftrightarrow y=4$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm là $(x;y)=(2;4)$

Trong ví dụ trên, học sinh cần biết cách đặt ẩn phụ một cách phù hợp để chuyển về hệ phương trình bậc nhất hai ẩn quen thuộc và biết cách giải phương trình bậc nhất một ẩn.

- Kĩ năng 2: Biến đổi phương trình, hệ phương trình

Nhấn mạnh cho học sinh thấy rõ vấn đề quan trọng của việc rèn luyện kĩ năng biến đổi phương trình, hệ phương trình. Hầu như khi tiến hành giải phương trình, hệ phương trình, người ta thường tìm cách biến đổi phương trình, hệ phương trình đó về phương trình, hệ phương trình đơn giản hơn và cuối cùng dẫn đến phương trình, hệ phương trình đã biết cách giải, có thể biến đổi phương trình đó về phương trình tương đương với phương trình đã cho hoặc là phương trình hệ quả của phương trình đã cho.

Ví dụ 2.10: Giải phương trình: $\dfrac{x+3}{x(x-1)}+\dfrac{3}{x}=\dfrac{2-x}{x-1}$ (1)

Điều kiện của phương trình (1) là $x \neq 0$ và $x \neq 1$.

Huy động kiến thức để tìm cách biến đổi phương trình (1) về phương trình dạng mẫu đã biết cách giải.

Nhân cả hai vế của phương trình (1) với $x(x-1)$, ta đưa tới phương trình hệ quả:

$$(1) \Rightarrow x+3+3(x-1)=x(2-x)$$
$$\Rightarrow x^2+2x=0$$
$$\Rightarrow x(x+2)=0$$

- Tới đây, phương trình (1) đã quay về dạng phương trình mẫu đã biết cách giải (phương trình tích).
- Huy động cách giải về phương trình tích, ta có:

Phương trình cuối có hai nghiệm là: $x=0$ và $x=-2$

Ta thấy $x=0$ không thỏa mãn điều kiện của phương trình (1), đó là nghiệm ngoại lai nên bị loại, còn $x=-2$ thỏa mãn điều kiện và là một nghiệm của phương trình (1).

Vậy phương trình (1) có nghiệm duy nhất là $x=-2$.

Ví dụ 2.11**:** Giải phương trình:

$$\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x-2-\sqrt{2x-5}}=2\sqrt{2}\ (1)$$

Từ hình thức của bài toán, học sinh chưa phát hiện được bài toán này thuộc dạng toán nào đã giải do biểu thức trong căn không phải là một bình phương đúng. Để giải bài toán này đòi hỏi học sinh phải có kĩ thuật biến đổi tinh tế, khéo léo mới có thể phát hiện được, cụ thể như sau:

Lời giải:

Cần phát hiện và biến đổi để đưa về hằng đẳng thức bình phương của một tổng hoặc một hiệu, cụ thể như sau:

$$x+2+3\sqrt{2x-5}=\frac{1}{2}(2x+4+6\sqrt{2x-5})=\frac{1}{2}(\sqrt{2x-5}+3)^2$$

$$x-2-\sqrt{2x-5}=\frac{1}{2}(2x-5-2\sqrt{2x-5}+1)=\frac{1}{2}(\sqrt{2x-5}-1)^2$$

Khi đó:

$$(1)\Leftrightarrow\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{2x-5}+3)^2}+\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{2x-5}-1)^2}=2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow\left|\sqrt{2x-5}+3\right|+\left|\sqrt{2x-5}-1\right|=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=3 \\ \frac{5}{2}\le x<3 \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $\frac{5}{2}\le x\le 3$

Ví dụ 2.12: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \frac{3}{4}x-\frac{2}{5}y=\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}x+\frac{4}{5}y=-\frac{1}{3} \end{cases}$

Đối với bài toán này học sinh dễ dàng thực hiện phép biến đổi tương đương bằng cách biến đổi cho hệ số của một ẩn trong hai phương trình là hai đối số đối nhau rồi cộng từng vế hai phương trình lại, cụ thể như sau:

Lời giải:

Ta có:

$$\begin{cases} \frac{3}{4}x-\frac{2}{5}y=\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}x+\frac{4}{5}y=-\frac{1}{3} \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \frac{3}{2}x-\frac{4}{5}y=1 \\ -\frac{3}{2}x-\frac{12}{5}y=1 \end{cases}$$

Cộng từng vế hai phương trình ta được: $-\frac{16}{5}y=2\Rightarrow y=-\frac{5}{8}$

Thay $y=-\frac{5}{8}$ vào một trong hai phương trình đã cho ta được: $x=\frac{1}{3}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(\frac{1}{3};-\frac{5}{8})$.

- Kĩ năng 3: Chuyển đổi ngôn ngữ, cách phát biểu bài toán về chủ đề phương trình, hệ phương trình

Khi rèn luyện kĩ năng chuyển đổi ngôn ngữ, cách phát biểu bài toán, cần làm rõ cho học sinh xác định yêu cầu của bài toán trước và sau khi biến đổi, dựa trên phép biến đổi đó là tương đương hay hệ quả.

***Ví dụ 2.13*:** Tìm m để phương trình sau có nghiệm:

$$\sqrt{x^2-1}-x=m \qquad (1)$$

Bằng việc chuyển vế và bình phương hai vế, ta đưa về phương trình:

$$2mx=-m^2-1 \qquad (2)$$

Học sinh phải xác định được phương trình (1) có nghiệm không tương đương với phương trình (2) có nghiệm, nghiệm của phương trình (1) là nghiệm của (2) nhưng ngược lại thì không luôn đúng, vì phép biến đổi là phép biến đổi hệ quả. Như vậy, ý thức được điều này, học sinh mới chuyển đổi đúng: để phương trình (1) có nghiệm thì (2) phải có nghiệm $x \geq -m$.

Cần rèn luyện cho học sinh kĩ năng chuyển đổi từ ngôn ngữ thông thường sang ngôn ngữ toán học. Từ việc phát biểu bài toán bằng ngôn ngữ thông thường sang phát biểu bài toán bằng công thức, bằng kí hiệu toán học và ngược lại. Điều này không chỉ cần khi giảng dạy toán phương trình, hệ phương trình mà còn giúp cho học sinh thấy được ứng dụng thực tế của lí thuyết phương trình, hệ phương trình trong khoa học và đời sống, hơn nữa còn giúp học sinh lĩnh hội tốt các phần kiến thức khác, nắm bắt các khái niệm, định lí ở dạng lời và ở dạng công thức.

***Ví dụ 2.14*:** Một nông dân có một mảnh ruộng hình vuông. Ông ta khai hoang mở rộng thêm thành một mảnh ruộng hình chữ nhật, một bề thêm 8m, một bề 12m. Diện tích mảnh ruộng hình chữ nhật hơn diện tích mảnh ruộng hình vuông $3136m^2$. Hỏi độ dài cạnh của mảnh ruộng hình vuông ban đầu bằng bao nhiêu?

Gọi *x* (mét) là độ dài cạnh của mảnh ruộng hình vuông.

- Giáo viên cần lưu ý cho học sinh phải xem xét điều kiện của ẩn sau khi đặt để loại những trường hợp không hợp thực tế.

Điều kiện: $x > 0$.

- Dựa vào các giả thiết của đề bài, chuyển đổi từ ngôn ngữ thông thường sang ngôn ngữ toán học ta có:

Hai cạnh của mảnh đất hình chữ nhật là: $(x+8);(x+12)$

- Bằng cách huy động kiến thức đã học về diện tích hình chữ nhật kết hợp với giả thiết bài toán ta có được điều gì? (Diện tích hình chữ nhật bằng $(x+8).(x+12)$)

- Bằng cách huy động kiến thức đã học về diện tích hình vuông kết hợp với giả thiết bài toán ta có được điều gì? (Diện tích hình vuông bằng x^2)

Theo giả thiết: $(x+8).(x+12)-x^2 = 3136 \Leftrightarrow 20x = 3040 \Leftrightarrow x = 152$

- Lưu ý học sinh kiểm tra điều kiện ban đầu. Ta thấy giá trị $x = 152$ thỏa điều kiện $x > 0$ nên nhận.

Vậy cạnh của mảnh ruộng hình vuông ban đầu bằng 152m.

Ví dụ 2.15: Hai bạn Vân và Lan đến cửa hàng mua trái cây. Bạn Vân mua 10 quả quýt, 7 quả cam với giá tiền là 17800 đồng. Bạn Lan mua 12 quả quýt, 6 quả cam hết 18000 đồng. Hỏi giá tiền mỗi quả quýt và mỗi quả cam là bao nhiêu?

Để giải quyết bài toán, học sinh cần phải biết cách chuyển bài toán về bài toán bằng cách lập hệ phương trình bậc nhất hai ẩn.

Sau khi đặt các ẩn, phải xem xét điều kiện của các ẩn số đó, để loại các lời giải bài toán không phù hợp thực tế. Sau đó, huy động kiến thức về giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn để giải.

Lời giải:

Gọi x, y (đồng) lần lượt là giá tiền một quả quýt, một quả cam.

Điều kiện: $x > 0; y > 0$. Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 10x + 7y = 17800 \\ 12x + 6y = 18000 \end{cases} \Rightarrow x = 800; y = 1400$$

Vậy giá mỗi quả quýt là 800 đồng, giá mỗi quả cam là 1400 đồng.

***Ví dụ 2.16*:** Cho một số có hai chữ số. Nếu đổi chỗ hai chữ số của nó thì được một số lớn hơn số đã cho là 63. Tổng của số đã cho và số mới tạo thành bằng 99. Tìm số đã cho.

- Để giải quyết bài toán này học sinh cần phải huy động kiến thức về cấu tạo số trong hệ thập phân: số có hai chữ số $\overline{xy}$ thì được biểu diễn là $10x+y$.

- Ta thấy hai đại lượng chưa biết là chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị của số cần tìm. Theo giả thiết, khi viết hai chữ số ấy theo thứ tự ngược lại, ta vẫn được một số có hai chữ số. Điều đó chứng tỏ rằng hai chữ số ấy đều phải khác 0.

Lời giải:

Gọi chữ số hàng chục của số cần tìm là *x* (Điều kiện: $0<x\le 9$)

chữ số hàng đơn vị của số cần tìm là *y* (Điều kiện: $0<y\le 9$)

Theo đề bài ta có :

Số ban đầu cần tìm là: $\overline{xy}=10x+y$

Khi viết hai chữ số theo thứ tự ngược lại, ta được số mới là: $\overline{yx}=10y+x$

Theo các điều kiện của đề bài ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}(10y+x)-(10x+y)=63\\(10x+y)+(10y+x)=99\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-x+y=7\\x+y=9\end{cases}$$

Tới đây, ta đã chuyển đổi bài toán dạng lời thành hệ phương trình bậc nhất hai ẩn đã biết cách giải.

Giải hệ ta được: $\begin{cases}x=1\\y=8\end{cases}$

Vậy số ban đầu cần tìm là: 18

Sau khi tìm ra: $\begin{cases}x=1\\y=8\end{cases}$, giáo viên lưu ý học sinh đối chiếu với điều kiện ban đầu của đề bài xem đã thỏa mãn các điều kiện chưa.

Ngoài ra cần rèn luyện cho học sinh kĩ năng chuyển đổi bài toán từ bài toán thuận sang bài toán nghịch và ngược lại, sự chuyển đổi đó phải đầy đủ và triệt để.

2.2.2 Biện pháp 2: Rèn luyện cho học sinh khả năng đặt câu hỏi và tìm cách trả lời nhằm huy động kiến thức một cách triệt để khi giải phương trình, hệ phương trình

Trong quá trình học, để nắm vững được vấn đề và để phát triển được sức suy nghĩ của mình, học sinh cần có khả năng đặt câu hỏi và tự trả lời. Bản thân việc nêu lên được câu hỏi và tự tìm cách trả lời tạo điều kiện rất tốt cho việc huy động kiến thức một cách triệt để. Việc giải đáp được các câu hỏi là dấu hiệu chứng tỏ đã hiểu bài tức là việc thu nhận thông tin rất tốt.

***Ví dụ 2.17*:** Giải phương trình: $2x+\sqrt{2x+1}=11$ (1)

Học sinh có thể đặt hệ thống câu hỏi như sau:

- Nhận dạng phương trình? (Là phương trình có biểu thức ở vế trái chứa căn bậc hai. Biểu thức bên ngoài và biểu thức trong dấu căn đều là nhị thức bậc nhất).

- Tìm điều kiện xác định của phương trình? ($2x+1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -\frac{1}{2}$).

- Ta có thể giải phương trình có chứa ẩn dưới dấu căn thức bậc hai bằng cách nào? (Bình phương hai vế để mất dấu căn).

- Thử khử dấu căn bậc hai của biểu thức $\sqrt{2x+1}$? (Bình phương hai vế (1) ta có: $(2x+\sqrt{2x+1})^2=11^2$).

- Nhận xét phương trình sau khi bình phương hai vế ? (Dấu căn thức bậc hai vẫn còn tồn tại).

- Như vậy, phải biến đổi phương trình như thế nào để sau khi bình phương thì khử được dấu căn bậc hai?

Chuyển hạng tử chứa căn thức về một vế và những hạng tử không chứa căn sang một vế. Ta có: $(1)\Leftrightarrow \sqrt{2x+1}=11-2x$

Bình phương hai vế ta được:

$$(1) \Rightarrow 2x+1=(11-2x)^2 \Rightarrow 4x^2-46x+120=0$$

$$\Rightarrow 2x^2-23x+60=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=\dfrac{15}{2} \end{array}\right.$$

- Hai giá trị x có phải là nghiệm của phương trình (1) không? Kiểm tra điều kiện xác định của phương trình và thử các giá trị x vào phương trình ban đầu? (Ta có: $x=4$ là nghiệm của phương trình).

Qua ví dụ trên, ta thấy nếu không có năng lực huy động kiến thức thì không thể đặt được hệ thống câu hỏi và tìm cách trả lời chúng.

***Ví dụ 2.18*:** Giải phương trình: $5\sqrt{4x^2-12x+11}=4x^2-12x+15(1)$

Học sinh có thể đặt hệ thống câu hỏi như sau:

- Biểu thức ngoài dấu căn là biểu thức bậc hai, nếu ta bình phương hai vế thì sẽ đi đến một phương trình bậc bốn rất khó giải.

Ta có thể giải bài toán như sau:

- Chưa vội đặt điều kiện ở bước giải này, ta biến đổi:

$$(1) \Leftrightarrow 4x^2-12x+11-5\sqrt{4x^2-12x+11}+4=0$$

- Hãy nhận xét mối liên hệ giữa biểu thức trong căn và biểu thức ngoài dấu căn ?

- Có thể đưa phương trình trên về dạng phương trình bậc hai quen thuộc bằng cách nào ?

Đặt $t=\sqrt{4x^2-12x+11}$;

- Khi đó *t* có điều kiện là gì ?

Điều kiện: $t \geq 0$ (*)

Phương trình (1) trở thành: $t^2-5t+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=4 \end{array}\right.$ (thoả mãn điều kiện (*))

- Hãy quay lại phép đặt để giải phương trình ẩn *x* ?

+ Với $t=1 \Leftrightarrow \sqrt{4x^2-12x+11}=1 \Leftrightarrow 4x^2-12x+10=0$: phương trình này vô nghiệm.

+ Với $t=4 \Leftrightarrow \sqrt{4x^2-12x+11}=4 \Leftrightarrow 4x^2-12x-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3+\sqrt{56}}{4} \\ x=\dfrac{3-\sqrt{56}}{4} \end{array}\right.$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x=\dfrac{3+\sqrt{56}}{4}; x=\dfrac{3-\sqrt{56}}{4}$

Như vậy khi gặp các bài toán thuộc các dạng nêu trên học sinh cần huy động kiến thức trong cách đặt câu hỏi: Điều kiện phương trình là gì? Đặt cái gì ? Biến đổi như thế nào là biến đổi tương đương ? Biến đổi như thế nào là biến đổi hệ quả? Kết luận nghiệm cuối cùng dựa vào điều kiện nào?

Ví dụ 2.19: Giải phương trình: $x^4-5x^3+8x^2-5x+1=0$ (1)

Học sinh có thể đặt hệ thống câu hỏi như sau:

- Xác định điều kiện của phương trình? ($\forall x \in \mathbb{R}$)
- Xét xem $x=0$ có phải là một nghiệm của phương trình không?

(Thử $x=0$ vào phương trình (1). Ta có $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình (1)).

- Ta có thể chia hai vế của phương trình (1) cho x^2 được không?

Thực hiện phép chia phương trình (1) cho x^2.

Ta có :

$$(1) \Leftrightarrow x^2-5x+8-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}=0 \Leftrightarrow (x^2+\frac{1}{x^2})-5(x+\frac{1}{x})+8=0$$

$$\Leftrightarrow (x+\frac{1}{x})^2-5(x+\frac{1}{x})+6=0$$

- Có thể đưa (1) về dạng phương trình bậc hai bằng cách nào?

Đặt ẩn phụ: $y=x+\dfrac{1}{x}$.

Khi đó: (1) trở thành: $y^2-5y+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=2 \\ y=3 \end{array}\right.$

- Hãy quay lại phép đặt để giải phương trình ẩn *x*?

- Với $y=2$, ta có: $x+\frac{1}{x}=2 \Rightarrow x^2-2x+1=0 \Rightarrow x=1$(nghiệm kép)

- Với $y=3$, ta có: $x+\frac{1}{x}=3 \Rightarrow x^2-3x+1=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ x=\frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$

Vậy phương trình có 3 nghiệm: $x=1; x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}; x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Ví dụ 2.20: Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} \sqrt{x-3}+y=1 \\ y\sqrt{x-3}=-2 \end{cases}$

Đối với bài toán này, nếu học sinh sử dụng phương pháp bình phương hai vế để làm mất căn thức sẽ dẫn đến các phương trình rất phức tạp, có thể giải được nhưng việc thực hiện rất vất vả và rất gian nan. Tuy nhiên, nếu giáo viên gợi ý khéo léo bằng các câu hỏi thì giúp học sinh huy động kiến thức về định lí Vi - ét đảo và từ đó dễ dàng giải được hệ phương trình đã cho.

Học sinh có thể đặt hệ thống câu hỏi như sau:

- Điều kiện của hệ phương trình là gì?
- Có nhận xét gì về các vế của mỗi phương trình trong hệ đã cho?
- Để giải hệ phương trình đã cho, ta cần liên tưởng đến định lí gì đã học?

Lời giải:

Điều kiện: $x \geq 3$.

Theo định lí Viét đảo thì $\sqrt{x-3}$ và y là nghiệm của phương trình:

$$X^2-X-2=0$$

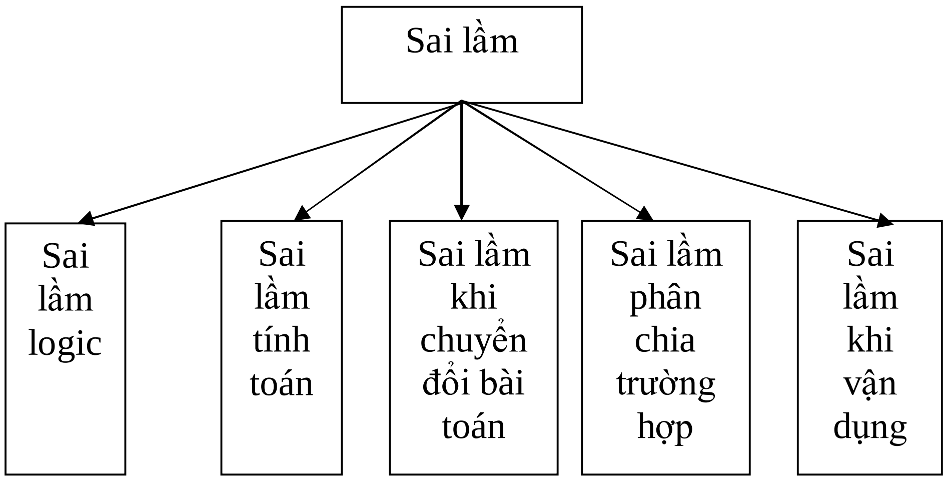
Phương trình này có hai nghiệm là $X=-1, X=2$.

Do $\sqrt{x-3} \geq 0$ nên ta có: $\begin{cases} \sqrt{x-3}=2 \\ y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=-1 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là: $(x;y)=(7;-1)$.

2.2.3 Biện pháp 3: Tăng cường các hoạt động phân tích và sửa chữa sai lầm của học sinh, góp phần rèn luyện khả năng sàng lọc liên tưởng và huy động kiến thức khi giải phương trình, hệ phương trình

Theo G. Polya, "Con người phải biết học ở những sai lầm và những thiếu sót của mình". Theo đó, chúng ta thấy rằng phân tích và sửa chữa sai lầm cho học sinh là cần thiết và cấp bách và có như vậy sẽ góp phần bồi dưỡng năng lực giải toán cho học sinh. Chúng ta thừa nhận rằng khả năng liên tưởng và huy động của học sinh chưa tốt một phần do kiến thức của học sinh chưa vững chắc làm cho quá trình sàng lọc liên tưởng chưa hiệu quả do một số sai lầm nào đó gây ra. Một số sai lầm học sinh thường gặp phải khi giải toán, thể hiện thông qua sơ đồ sau:



Năm sai lầm trên là các dạng sai lầm thường xuất hiện trong quá trình giải toán của học sinh, ở một góc độ nào đó các dạng sai lầm đó cũng liên quan và ảnh hưởng đến khả năng liên tưởng và huy động kiến thức của học sinh. Vì vậy, để bồi dưỡng năng lực giải toán của học sinh, người giáo viên cần phải có ý thức phòng tránh, phát hiện và sửa chữa kịp thời những sai lầm học sinh thường gặp.

Việc cho học sinh phát hiện sai lầm và sửa chữa sai lầm là một cách hữu hiệu nhất để học sinh có thể tự kiểm tra lại kiến thức của mình, đồng thời giúp học sinh nắm vững và nhớ lâu hơn kiến thức.

Khi dạy học sinh giải phương trình, hệ phương trình học sinh thường mắc phải những sai lầm sau:

- Sai lầm khi thực hiện các phép biến đổi phương trình vì học sinh thường chưa phân biệt đâu là phép biến đổi tương đương, đâu là phép biến đổi hệ quả.

***Ví dụ 2.21*:** Phép bình phương hai vế của một phương trình khi yêu cầu học sinh giải phương trình: $\sqrt{x+3}=x-3$, thì hầu hết các em đều đặt điều kiện để phương trình có nghĩa và bình phương hai vế. Cuối cùng đưa đến khẳng định phương trình có hai nghiệm là: $x=1; x=6$ mà quên rằng $x=1$ là nghiệm ngoại lai, vì phép bình phương hai vế mà hai vế chưa cùng dấu thì được một phương trình thường không tương đương phương trình ban đầu.

- Sai lầm do chưa nhận thức được đặc điểm yêu cầu các thể loại của bài toán phương trình có tham số, chẳng hạn học sinh thường không phân biệt được giữa bài toán biện luận và bài toán tìm điều kiện để phương trình thỏa một tính chất nào đó, từ đó dẫn đến đồng nhất hai loại bài toán trên.

Ví dụ 2.22: Khi cho các em bài toán: " Giải và biện luận phương trình sau theo tham số m, $\sqrt{2x-1}=m$" thì đại đa số các em đều đưa ra lời giải như sau: " Điều kiện phương trình có nghiệm là $m\geq 0$, lúc đó phương trình tương đương với $2x-1=m^2 \Leftrightarrow x=\frac{m^2+1}{2}$. Vậy điều kiện để phương trình có nghiệm là $m\geq 0$". Với lời giải như vậy, thì chỉ đáp ứng một trường hợp của bài toán, vì các em quên rằng bài toán đã cho là bài toán biện luận, chứ không phải là bài toán tìm điều kiện để phương trình có nghiệm.

- Về cách trình bày, biểu hiện sai lầm của học sinh thường là viết các dấu tương đương, suy ra một cách tùy tiện.

Để học sinh có thể tự mình phát hiện sai lầm và sửa chữa sai lầm của một bài toán thì giáo viên cần nêu ra những bài toán có lời giải chưa đúng, yêu cầu học sinh tìm chỗ sai và đưa lời giải đúng cho bài toán đó.

***Ví dụ 2.23*:** Giải phương trình: $x+\frac{3}{2x-1}=\frac{3}{2x-1}+5$

Một học sinh thực hiện lời giải như sau:

$$x+\frac{3}{2x-1}=\frac{3}{2x-1}+5 \Leftrightarrow x+\frac{3}{2x-1}-\frac{3}{2x-1}=\frac{3}{2x-1}+5-\frac{3}{2x-1} \Leftrightarrow x=5$$

Hãy tìm sai lầm trong phép biến đổi trên?

Nguyên nhân sai lầm: Phép biến đổi ở đây không phải là phép biến đổi tương đương, sau khi biến đổi thì điều kiện xác định của phương trình đã thay đổi. Vì phép giản ước hai vế không cho ta phương trình tương đương với phương trình đã cho.

Lời giải đúng:

$$x+\frac{3}{2x-1}=\frac{3}{2x-1}+5 \Leftrightarrow \frac{x(2x-1)+3}{2x-1}=\frac{3+5(2x-1)}{2x-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2-11x+5}{2x-1}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq\frac{1}{2} \\ 2x^2-11x+5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\neq\frac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=\frac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=5$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=5$.

***Ví dụ 2.24*:** Giải phương trình: $|2x-1|=x-2$ (1)

Một học sinh thực hiện lời giải như sau:

Bước 1: Vì $|2x-1|\geq 0$ với $\forall x\in\mathbb{R}$ nên điều kiện xác định của (1) là

$x-2\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 2$

Bước 2: $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 2 \\ \left[\begin{array}{l} 2x-1=x-2 \;\; (\mathrm{I}) \\ 2x-1=-x+2 \end{array}\right. \end{cases}$

Bước 3: Giải hệ (I), ta được: $x=-1; x=1$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S=\{\pm 1\}$

Bài toán trên đúng hay sai? Nếu sai thì sai ở đâu?

Nguyên nhân sai lầm: Lời giải trên sai ở bước ba, vì học sinh quên kiểm tra điều kiện xác định của phương trình.

Lời giải đúng:

$$(1) \Rightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ \left[\begin{array}{l} 2x-1 = x-2 \\ 2x-1 = -x+2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = \varnothing$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Ví dụ 2.25**:** Giải phương trình: $3x^3 - 6x^2 - 9x = 9(x^2 - 2x - 3)$ (*)

Một học sinh thực hiện lời giải như sau:

$$3x^3 - 6x^2 - 9x = 9(x^2 - 2x - 3)$$
$$\Leftrightarrow 3x(x^2 - 2x - 3) = 9(x^2 - 2x - 3)$$
$$\Leftrightarrow 3x = 9 \Leftrightarrow x = 3$$

Nguyên nhân sai lầm: Có thể thấy ngay $x = -1$ cũng là nghiệm của phương trình, sai lầm ở đây là do học sinh đã chia cả hai vế cho $(x^2 - 2x - 3)$. Cần lưu ý với học sinh rằng $a.b = c.b \Leftrightarrow b(a-c) = 0$.

Lời giải đúng: $(*) \Leftrightarrow (x^2 - 2x - 3)(3x - 9) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right.$

Ví dụ 2.26: Giải phương trình: $\sqrt{x^2 - 4x + 2} = \sqrt{3x - 10}$ (1)

Một học sinh thực hiện lời giải như sau:

$$(1) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 2 = 3x - 10 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 4 \end{array}\right.$$

Nguyên nhân sai lầm: Học sinh quên đặt điều kiện để các phương trình có nghĩa. Với $x = 3$ thì căn thức $\sqrt{3x - 10}$ vô nghĩa nên $x = 3$ là nghiệm ngoại lai.

Lời giải đúng:

$$\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\ge 0(\text{ hay } g(x)\ge 0) \\ f(x)=g(x) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x+2=3x-10 \\ 3x-10\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-7x+12=0 \\ x\ge \dfrac{10}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=4 \end{array}\right. \\ x\ge \dfrac{10}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x=4$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=4$.

Ví dụ 2.27: Giải phương trình: $(x-3)(x+1)+4(x-3)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}}=-3$

Một học sinh thực hiện lời giải như sau:

Điều kiện: $\dfrac{x+1}{x-3}\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>3 \\ x\le -1 \end{array}\right.$

Biến đổi phương trình trở thành: $(x-3)(x+1)+4\sqrt{(x-3)(x+1)}=-3$

Đặt $t=\sqrt{(x-3)(x+1)}$ $(t\ge 0)$. Phương trình đã cho có dạng:

$$t^2+4t+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-3 \\ t=-1 \end{array}\right.$$

Cả hai giá trị t tìm được đều âm (không thỏa mãn điều kiện $t\ge 0$) nên phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán trên đúng hay sai? Nếu sai thì sai ở đâu?

Giáo viên: Phép biến đổi $(x-3)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}}=\sqrt{(x-3)(x+1)}$ chưa đúng. Phép biến đổi này chỉ đúng khi nào? (Khi $x-3\ge 0$)

Như vậy, lời giải trên thực hiện không đúng. Sai lầm từ phép biến đổi $(x-3)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}}=\sqrt{(x-3)(x+1)}$ không phải là phép biến đổi tương đương. Để khắc phục điều đó có hai hướng giải quyết:

Hướng 1: Khắc phục sai lầm do biến đổi

Thực hiện phép biến đổi tương đương:

$$(x-3)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}}=\begin{cases} \sqrt{(x-3)(x+1)} & \text{khi } x-3>0 \\ -\sqrt{(x-3)(x+1)} & \text{khi } x-3<0 \end{cases}$$

- Xét $x>3$, phương trình trở thành: $(x-3)(x+1)+4\sqrt{(x-3)(x+1)}=-3$

Giải như trên, phương trình vô nghiệm.

- Xét $x\le -1$, phương trình trở thành:

$(x-3)(x+1)-4\sqrt{(x-3)(x+1)}=-3$

Đặt $t=\sqrt{(x-3)(x+1)}\quad (t\ge 0)$, phương trình có dạng:

$$t^2-4t+3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=3 \end{array}\right.$$

Với $t=1$, ta được: $\sqrt{(x-3)(x+1)}=1\Leftrightarrow x^2-2x-4=0\Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{5}$

Đối chiếu với điều kiện $x\le -1$ ta được nghiệm $x=1-\sqrt{5}$

Với $t=3$, ta được: $\sqrt{(x-3)(x+1)}=3\Leftrightarrow x^2-2x-12=0\Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{13}$

Đối chiếu với điều kiện $x\le -1$ ta được nghiệm $x=1-\sqrt{13}$

Kết luận: Phương trình có hai nghiệm $x=1-\sqrt{5}$ và $x=1-\sqrt{13}$

Hướng 2: Khắc phục sai lầm do biến đổi bằng cách thay đổi cách chọn ẩn phụ.

Đặt $t=(x-3)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}}$. Suy ra: $(x-3)(x+1)=t^2$

Khi đó, phương trình có dạng: $t^2+4t+3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=-3 \end{array}\right.$

Với $t=-3$, ta được: $(x-3)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}}=-3\Leftrightarrow \begin{cases} x-3<0 \\ (x-3)(x+1)=9 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x<3 \\ x=1\pm\sqrt{13} \end{cases}\Leftrightarrow x=1-\sqrt{13}$$

Với $t=-1$, ta được:

$$(x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}}=-1\Leftrightarrow \begin{cases} x-3<0 \\ (x-3)(x+1)=1 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x<3 \\ x=1\pm\sqrt{5} \end{cases}\Leftrightarrow x=1-\sqrt{5}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x=1-\sqrt{5}$ và $x=1-\sqrt{13}$

Trong quá trình giải phương trình, học sinh có thể sử dụng các phép biến đổi khác nhau nhưng để hiểu sâu sắc về các phép biến đổi đó thì không dễ dàng mà thông thông thường thì học sinh thường áp dụng một cách máy móc, hình thức. Để khắc phục được tình trạng này, trong quá trình dạy học giáo viên cần chú trọng cho học sinh cả hai phương diện ngữ nghĩa (xét về mặt nội dung) và phương diện cú pháp (xét về cấu trúc hình thức và sự biến đổi hình thức những biểu thức toán học) của phương trình. Giáo viên chú trọng rèn luyện cho học sinh cả hai phương diện này giúp cho học sinh khắc phục được cách làm máy móc, hình thức đồng thời rèn luyện cho các em kỹ năng làm việc theo quy trình.

***Ví dụ 2.28*:** Giải phương trình: $\sqrt{3-2x} = x - \frac{3}{2}$

- Xét về phương diện ngữ nghĩa, ta thấy điều kiện xác định của phương trình là $x \le \frac{3}{2}$, khi đó $\sqrt{3-2x} \ge 0; x - \frac{3}{2} \le 0$, nên phương trình có nghiệm là $x = \frac{3}{2}$.

- Xét về phương diện cú pháp, ta biến đổi phương trình một cách hình thức như sau:

$$\sqrt{3-2x} = x - \frac{3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-2x = (x-\frac{3}{2})^2 \\ x - \frac{3}{2} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

Như vậy, với những ví dụ trên thì giáo viên sẽ tạo cho học sinh có cơ hội làm quen với một số sai lầm thường gặp và đề xuất hướng sửa chữa những sai lầm đó. Nhờ vậy mà các em sẽ khắc sâu thêm kiến thức hơn, đồng thời tránh được những sai lầm đó khi gặp các bài tập tương tự.

2.2.4 Biện pháp 4: Rèn luyện cho học sinh năng lực huy động kiến thức thông qua dạy học chuỗi bài tập về phương trình, hệ phương trình

Mỗi một chuỗi bài toán thì học sinh sẽ được lĩnh hội những tri thức khác nhau tùy thuộc vào mục đích của học tập, chẳng hạn chuỗi bài toán với vai trò củng cố khái niệm, định lí; vai trò phát triển các hoạt động trí tuệ cơ bản như phân tích, tổng hợp,..Từ đó hình thành dần cho các em kĩ năng tư duy liên tưởng từ một bài toán ban đầu thành những bài toán mới, đa dạng, phong phú hơn. Và một trong những phương pháp xây dựng chuỗi bài toán là dựa vào năng lực huy động kiến thức của học sinh thông qua thao tác như: tổng hợp hóa, xét trường hợp riêng, trường hợp tương tự, khai triển và tổ hợp lại.

***Ví dụ 2.29*:** Chuỗi bài tập về giải phương trình chứa trị tuyệt đối:

a. $|3x-1| = 2x-5$

b. $\dfrac{x-1}{2x-3} = \dfrac{-3x+1}{|x+1|}$

c. $|2x+1| = |4x-7|$

d. $\dfrac{1}{|x-2|} = \dfrac{1}{|x-52|}$

e. $|5x+2| + |3x-4| = 4x+5$

f. $\dfrac{|3x-1|}{x+2} = |x-3|$

g. $\left|\dfrac{x+1}{x^2+2x+2}\right| = \dfrac{1}{2}$

Để giải phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối ta có thể dùng định nghĩa của giá trị tuyệt đối hoặc bình phương hai vế để khử dấu giá trị tuyệt đối.

- Cụ thể câu a, có thể giải như sau:

+ Với điều kiện: $x \geq \dfrac{1}{3}$ phương trình có dạng: $3x-1 = 2x-5 \Leftrightarrow x = -4$

Giá trị này không thỏa mãn điều kiện $x \geq \dfrac{1}{3}$ nên bị loại.

+ Với điều kiện: $x < \dfrac{1}{3}$ phương trình có dạng: $-3x+1 = 2x-5 \Leftrightarrow x = \dfrac{6}{5}$

Giá trị này cũng không thỏa mãn điều kiện $x < \dfrac{1}{3}$ nên bị loại.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

- Để làm được câu b, ta cũng sử dụng định nghĩa giá trị tuyệt đối, nhưng cần lưu ý đến điều kiện của phương trình, cụ thể như sau:

Điều kiện: $x \neq \dfrac{3}{2}; x \neq -1$

+ Nếu $x > -1$, phương trình đã cho tương đương với phương trình:

$$x^2 - 1 = -6x^2 + 11x - 3 \Leftrightarrow 7x^2 - 11x + 2 = 0$$

Phương trình cuối có hai nghiệm $x_{1,2} = \dfrac{11 \pm \sqrt{65}}{14}$ đều lớn hơn -1 và $\neq \dfrac{3}{2}$ nên là nghiệm của phương trình đã cho.

+ Nếu $x < -1$ phương trình đã cho tương đương với phương trình:

$$1 - x^2 = -6x^2 + 11x - 3 \Leftrightarrow 5x^2 - 11x + 4 = 0$$

Phương trình cuối có hai nghiệm $x_{3,4} = \dfrac{11 \pm \sqrt{41}}{10}$ đều lớn hơn -1 nên bị loại.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $x_{1,2} = \dfrac{11 \pm \sqrt{65}}{14}$

Nếu cả vế trái và vế phải đều chứa ẩn trong giá trị tuyệt đối thì bài toán được giải quyết như thế nào?

c. $|2x+1| = |4x-7|$

Để giải quyết bài toán này có thể sử dụng định nghĩa để khử dấu giá trị tuyệt đối.

Có thể giải như sau:

$$|2x+1| = |4x-7| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+1 = 4x-7 \\ 2x+1 = -4x+7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = 1 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm: $x = 1; x = 4$

- Đối với câu d, cách làm tương tự câu c, hoặc chú ý đến hai vế của phương trình là những biểu thức không âm nên ta cũng có thể bình phương hai vế để được một phương trình tương đương, cụ thể như sau:

$$\frac{1}{|x-2|} = \frac{1}{|x-52|} \Leftrightarrow |x-2| = |x-52| \Leftrightarrow (x-2)^2 = (x-52)^2 \quad (*)$$

Tới đây, để giải phương trình này được dễ dàng, ta chuyển vế và huy động kiến thức về hằng đẳng thức: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$$(*) \Leftrightarrow (x-2)^2 - (x-52)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-2+x-52)(x-2-x+52) = 0$$
$$\Leftrightarrow 50(2x-54) = 0 \Leftrightarrow x = 27 \text{ (N)}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 27$

Nếu vế trái có dạng tổng của hai trị tuyệt đối thì bài toán được giải quyết như thế nào?

e. $|5x+2|+|3x-4| = 4x+5$

Để giải quyết bài toán này, ta có thể chia trục số thành ba khoảng: $(-\infty;-\frac{2}{5});[-\frac{2}{5};\frac{4}{3});[\frac{4}{3};+\infty)$

Có thể giải như sau:

+ Với $x \in (-\infty;-\frac{2}{5})$ phương trình có dạng:

$$-5x-2-3x+4 = 4x+5 \Leftrightarrow 12x = -3 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}$$

Giá trị $-\frac{1}{4} \notin (-\infty;-\frac{2}{5})$ nên bị loại

+ Với $x \in [-\frac{2}{5};\frac{4}{3})$ phương trình có dạng:

$$5x+2-3x+4 = 4x+5 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Giá trị $\frac{1}{2} \in [-\frac{2}{3};\frac{4}{3})$ nên là nghiệm của phương trình

+ Với $x \in [\frac{4}{3};+\infty)$ phương trình có dạng:

$$5x+2+3x-4 = 4x+5 \Leftrightarrow 4x = 7 \Leftrightarrow x = \frac{7}{4}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $x = \frac{1}{2}; x = \frac{7}{4}$

- Đối với câu f, cách làm cũng tương tự câu e, ta có thể chia khoảng để khử dấu giá trị tuyệt đối, cụ thể như sau:

+ Với $x \geq 3$ thì $\begin{cases} |x-3| = x-3 \\ |3x-1| = 3x-1 \end{cases}$

Với điều kiện đó phương trình đã cho trở thành:

$$\frac{3x-1}{x+2} = x-3 \Leftrightarrow 3x-1 = x^2-x-6 \Leftrightarrow x^2-4x-5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=5 \end{array}\right.$$

Vì $x \geq 3$ nên chỉ có $x = 5$ là nghiệm của phương trình.

+ Với $\frac{1}{3} \leq x < 3$ thì $\begin{cases} |x-3| = -x+3 \\ |3x-1| = 3x-1 \end{cases}$

Với điều kiện đó phương trình đã cho trở thành:

$$\frac{3x-1}{x+2} = -x+3 \Leftrightarrow 3x-1 = -x^2+x+6 \Leftrightarrow x^2+2x-7=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1+2\sqrt{2} \\ x=-1-2\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Vì $\frac{1}{3} \leq x < 3$ nên chỉ có giá trị là nghiệm của phương trình.

+ Với $x < \frac{1}{3}$ thì $\begin{cases} |x-3| = -x+3 \\ |3x-1| = -3x+1 \end{cases}$

Với điều kiện đó phương trình đã cho trở thành:

$$\frac{-3x+1}{x+2} = -x+3 \Leftrightarrow -3x+1 = -x^2+x+6 \Leftrightarrow x^2-4x-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=5 \end{array}\right.$$

Vì $x < \frac{1}{3}$ nên chỉ có giá trị $x=-1$ là nghiệm của phương trình.

Kết luận: Phương trình đã cho có ba nghiệm $x=5; x=2\sqrt{2}-1; x=-1$

- Đối với câu g, nhìn vào phương trình ta thấy hơi phức tạp, nhưng chú ý quan sát ta thấy:

$$x^2+2x+2=(x+1)^2+1>0, \forall x.$$

Do đó có thể biến đổi phương trình như sau:

$$\left|\frac{x+1}{x^2+2x+2}\right| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{|x+1|}{x^2+2x+2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2|x+1| = x^2+2x+2$$
$$\Leftrightarrow x^2+2x+2-2|x+1| = 0 \quad (*)$$

Tới đây, để giải được phương trình (*) cần huy động kiến thức đã học để đưa phương trình (*) về dạng quen thuộc đã học, cụ thể là:

Đặt ẩn phụ: $t=|x+1|$. Cần lưu ý cho học sinh điều kiện của ẩn phụ: $t \geq 0$.

Khi đó: $t^2 = x^2+2x+1$

Phương trình (*) trở thành: $t^2-2t+1=0 \Leftrightarrow t=1$ (thỏa điều kiện)

Ta có: $t=1 \Leftrightarrow |x+1|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=1 \\ x+1=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \end{array}\right.$

Vậy phương trình có tập nghiệm $x=0; x=-2$.

***Ví dụ 2.30*:** Chuỗi bài tập về giải và biện luận phương trình theo tham số *m*:

a. $m^2(x+1)-1=(2-m)x$

b. $m^2x+1=(m-1)x+m$

c. $m(x-m+3)=m(x-2)+6$

d. $\dfrac{(m+3)x+2(3m+1)}{x+1}=(2m-1)x+2$

e. $|4x-3m|=2x+m$

f. $|3x-m|=|2x+m+1|$

g. $|2x+m-1|=||x|+m|$

Để giải và biện luận phương trình chứa tham số *m*, ta đưa về dạng phương trình bậc nhất, bậc hai. Sau đó, áp dụng cách giải đã học cụ thể ở câu a, b, c như sau:

- Đối với câu a

$$m^2(x+1)-1=(2-m)x$$
$$\Leftrightarrow (m-1)(m+2)x=-(m-1)(m+1)$$

Kết luận:

Nếu $m \neq 1$ và $m \neq -2$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $x=-\dfrac{m+1}{m+2}$

Nếu $m=1$ thì mọi số thực *x* đều là nghiệm của phương trình.

Nếu $m=-2$ thì phương trình vô nghiệm.

Trong ví dụ a trên, ta thấy tồn tại đầy đủ các khả năng được minh họa trong bài toán tổng quát, tuy nhiên sẽ tồn tại những bài toán là một trường hợp đặc biệt:

- Hệ số $a \neq 0$ với mọi giá trị của tham số, khi đó ta kết luận ngay tính duy nhất nghiệm của phương trình.

- Hệ số $a=0$ với mọi giá trị của tham số, khi đó ta biện luận cho *b*.

- Cụ thể ở câu b, c như sau:

Đối với câu b: $m^2x+1=(m-1)x+m$

Lời giải

Viết lại phương trình dưới dạng: $(m^2-m+1)x=m-1(1)$

Ta có: $m^2-m+1=(m-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\neq 0, \forall m$

Do đó: $(1)\Leftrightarrow x=\dfrac{m-1}{m^2-m+1}$

Vậy với $\forall m$, phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{m-1}{m^2-m+1}$

Đối với câu c: $m(x-m+3)=m(x-2)+6$

Lời giải

Viết lại phương trình dưới dạng: $m^2-5m+6=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=3 \end{array}\right.$

Kết luận:

- Với $m=2$ hoặc $m=3$, phương trình nhận mọi *x* làm nghiệm.
- Với $m\in\mathbb{R}\setminus\{2;3\}$, phương trình vô nghiệm.

Chú ý trong trường hợp bài toán có nhiều tham số chúng ta cần khéo léo biện luận theo các tham số để vét cạn được các trường hợp.

- Ở câu d để làm được cần tìm cách biến đổi phương trình về dạng quen thuộc (cụ thể ở đây là phương trình bậc hai).

Điều kiện của phương trình là: $x\neq -1$. Khi đó, ta có:

$(1)\Leftrightarrow (m+3)x+2(3m+1)=[(2m-1)x+2](x+1)$

$\Leftrightarrow (m+3)x+2(3m+1)=(2m-1)x^2+(2m+1)x+2$

$\Leftrightarrow (2m-1)x^2+(m-2)x-6m=0 \quad (*)$

Với $m=\frac{1}{2}$ phương trình (*) trở thành: $-\frac{3}{2}x-3=0\Leftrightarrow x=-2$

Giá trị $x=-2$ thỏa mãn điều kiện của phương trình đã cho.

Với $m \neq \frac{1}{2}$ phương trình (*) là một phương trình bậc hai có biệt thức:

$$\Delta = (m-2)^2 + 24m(2m-1)$$
$$= 49m^2 - 28m + 4$$
$$= (7m-2)^2 \geq 0$$

Khi $m \neq \frac{2}{7}$ phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt: $x_{1,2} = \frac{2-m \pm (7m-2)}{2(2m-1)}$

Ta đặt: $x_1 = \frac{3m}{2m-1}; x_2 = -2$

Giá trị $\frac{3m}{2m-1} \neq -1$ khi và chỉ khi $3m \neq -2m+1$ hay $m \neq \frac{1}{5}$

Khi $m = \frac{2}{7}$ phương trình (*) có nghiệm kép $x = -2$.

Kết luận:

Khi $m = \frac{1}{2}$ hoặc $m = \frac{1}{5}$ phương trình có một nghiệm $x = -2$.

Khi $m = \frac{2}{7}$ phương trình có nghiệm kép $x = -2$.

Khi $m \neq \frac{1}{2}; m \neq \frac{1}{5}; m \neq \frac{2}{7}$ phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{3m}{2m-1}$ và $x_2 = -2$.

- Ở câu e để đưa về dạng quen thuộc cần huy động kiến thức về định nghĩa trị tuyệt đối, cụ thể như sau:

Ta xét hai trường hợp:

+ Với $x \geq \frac{3m}{4}$ phương trình trở thành:

$$4x - 3m = 2x + m \Leftrightarrow 2x = 4m \Leftrightarrow x = 2m$$

Ta có: $2m \geq \frac{3m}{4} \Leftrightarrow m \geq 0$

Vậy với $m \geq 0$ thì phương trình có nghiệm $x = 2m$

+ Với $x < \frac{3m}{4}$ phương trình trở thành:

$-4x + 3m = 2x + m \Leftrightarrow 6x = 2m \Leftrightarrow x = \frac{m}{3}$

Ta có: $\frac{m}{3} < \frac{3m}{4} \Leftrightarrow \frac{3m}{4} - \frac{m}{3} > 0 \Leftrightarrow \frac{5m}{12} > 0 \Leftrightarrow m > 0$

Vậy với $m > 0$ phương trình có nghiệm $x = \frac{m}{3}$

Kết luận: Với $m > 0$ phương trình có nghiệm $x = 2m$ và $x = \frac{m}{3}$.

Với $m = 0$ phương trình có nghiệm $x = 0$.

Với $m < 0$ phương trình vô nghiệm.

- Ở câu f , ta có thể làm tương tự câu e hoặc chú ý đến hai vế của phương trình là những biểu thức không âm nên ta cũng có thể bình phương hai vế để được một phương trình tương đương, cụ thể như sau:

Ta có: $|3x - m| = |2x + m + 1| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 3x - m = 2x + m + 1 & (1) \\ 3x - m = -2x - m - 1 & (2) \end{array}\right.$

Ta thấy:

$(1) \Leftrightarrow x = 2m + 1$

$(2) \Leftrightarrow 5x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{5}$

Hai nghiệm này trùng nhau khi: $2m + 1 = -\frac{1}{5} \Leftrightarrow 2m = -\frac{6}{5} \Leftrightarrow m = -\frac{3}{5}$

Kết luận:

Với $m \neq -\frac{3}{5}$ phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x = 2m + 1$ và $x = -\frac{1}{5}$.

Với $m = -\frac{3}{5}$ phương trình có nghiệm kép $x = -\frac{1}{5}$.

- Ở câu g, nhìn vào thì ta thấy hơi phức tạp, đây là dạng phương trình chứa nhiều dấu giá trị tuyệt đối, đòi hỏi học sinh cần vận dụng một cách linh hoạt cần áp định nghĩa giá trị tuyệt đối đúng cách sẽ dễ dàng tìm được cách giải, cụ thể như sau:

Ta xét hai trường hợp:

+ Trường hợp 1: $x \geq 0$

Ta có:

$|2x+m-1| = ||x|+m| \Leftrightarrow |2x+m-1| = |x+m|$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2x+m-1 = x+m & (1) \\ 2x+m-1 = -x-m & (2) \end{array}\right.$$

Ta có: $(1) \Leftrightarrow x = 1$ (thỏa mãn điều kiện $x \geq 0$) và $(2) \Leftrightarrow x = \dfrac{1-2m}{3}$

Do điều kiện $x \geq 0$ nên $\dfrac{1-2m}{3} \geq 0 \Leftrightarrow 1-2m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \dfrac{1}{2}$

+ Trường hợp 2: $x < 0$, ta có:

$|2x+m-1| = ||x|+m| \Leftrightarrow |2x+m-1| = |-x+m|$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2x+m-1 = -x+m & (3) \\ 2x+m-1 = x-m & (4) \end{array}\right.$$

Ta có: $(3) \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3} > 0$ (loại)

$(4) \Leftrightarrow x = 1-2m$, do điều kiện $x < 0$ nên $1-2m < 0 \Leftrightarrow m > \dfrac{1}{2}$

Vậy: $m \leq \dfrac{1}{2}$ thì phương trình có 2 nghiệm: $x = 1$ và $x = \dfrac{1-2m}{3}$.

$m > \dfrac{1}{2}$ thì phương trình có 2 nghiệm: $x = 1$ và $x = 1-2m$.

Ví dụ 2.31: Chuỗi bài tập về giải hệ phương trình:

a. $\begin{cases} 3x-4y = 2 \\ -5x+3y = 4 \end{cases}$

b. $\begin{cases} -4x+5y = -3 \\ 7x+3y = 8 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 3x^2+y^2 = 5 \\ x^2-3y^2 = 1 \end{cases}$

d. $\begin{cases} -3x+y = 2 & (1) \\ x^2+2y^2 = 3 & (2) \end{cases}$

e. $\begin{cases} x+y=5 \\ x^2+y^2=10 \end{cases}$

f. $\begin{cases} -3x+2y-z=-2 \\ 5x-3y+2z=10 \\ 2x-2y-3z=-9 \end{cases}$

g. $\begin{cases} x+y=5 & (1) \\ y+z=-1 & (2) \\ z+x=-2 & (3) \end{cases}$

- Đối với câu a, câu b là những hệ phương trình bậc nhất hai ẩn quen thuộc nên học sinh có thể giải bằng phương pháp thế hoặc phương pháp cộng, cụ thể như sau:

Ở câu a, từ phương trình thứ nhất suy ra: $x=\dfrac{4y+2}{3}$

Thay biểu thức của x vào phương trình thứ hai, ta được:

$-5(\dfrac{4y+2}{3})+3y=4 \Rightarrow -\dfrac{11}{3}y=\dfrac{22}{3} \Rightarrow y=-2$

Từ đó: $x=\dfrac{4(-2)+2}{3}=-2$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(-2;-2)$

- Đối với câu b, ta có:

$\begin{cases} -4x+5y=-3 \\ 7x+3y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -28x+35y=-21 \\ 28x+12y=32 \end{cases}$

Cộng từng vế hai phương trình ta được: $47y=11 \Leftrightarrow y=\dfrac{11}{47}$

Thay $y=\dfrac{11}{47}$ vào một trong hai phương trình của hệ đã cho ta được: $x=\dfrac{49}{47}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(\dfrac{49}{47};\dfrac{11}{47})$

- Đối với câu c, mức độ khó hơn câu a, b. Để đưa về hệ phương trình bậc nhất hai ẩn quen thuộc thì học sinh cần biết cách đặt ẩn phụ cho phù hợp, cần lưu ý đến điều kiện của ẩn phụ, cụ thể như sau:

Lời giải:

Đặt: $x^2 = X$, điều kiện: $X \geq 0$

$y^2 = Y$, điều kiện: $Y \geq 0$

Khi đó, hệ phương trình trở thành: $\begin{cases} 3X + Y = 5 \\ X - 3Y = 1 \end{cases}$

Sử dụng phương pháp thế, giải ra được: $\begin{cases} X = \dfrac{8}{5} \\ Y = \dfrac{1}{5} \end{cases}$ (Nhận)

Ta có:

$X = \frac{8}{5} \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{10}}{5}$

$Y = \frac{1}{5} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{5}}{5}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(\frac{2\sqrt{10}}{5}; \frac{\sqrt{5}}{5})$

- Đối với câu d, ta thấy hệ phương trình có đặc điểm sau: có một phương trình bậc nhất nên để giải bài toán này, ta dùng phương pháp thế, cụ thể như sau:

Từ phương trình (1) ta có: $y = 2 + 3x$.

Thay vào (2) ta được: $x^2 + 2(2+3x)^2 = 3 \Leftrightarrow 19x^2 + 24x + 5 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -\dfrac{5}{19} \end{array}\right.$

* Với $x = -1 \Rightarrow y = -1$

* Với $x = -\frac{5}{19} \Rightarrow y = \frac{23}{19}$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm: $(-1;-1); (-\frac{5}{19}; \frac{23}{19})$

- Đối với câu e, ta có thể giải tương tự câu d hoặc huy động kiến thức về định lí Vi – ét , cụ thể như sau:

Bằng cách huy động kiến thức đã học, ta tìm cách biến đổi đưa về dạng quen thuộc, cụ thể như sau:

$$\begin{cases} x+y=5 \\ x^2+y^2=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2-2xy=10 \\ x+y=5 \end{cases} \quad (*)$$

Tới đây, ta thấy xuất hiện tổng $x+y$, tích xy, ta liên tưởng đến định lí Vi – ét, nên ta đặt:

$\begin{cases} S=x+y \\ P=xy \end{cases}$ (điều kiện: $S^2-4P\geq 0$)

Khi đó, hệ (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} S^2-2P=0 \\ S=5 \end{cases}$

Tới đây, sử dụng phương pháp thế, giải ra được: $\begin{cases} S=5 \\ P=\dfrac{15}{2} \end{cases}$

Trả về ẩn ban đầu, ta được: $\begin{cases} x+y=5 \\ xy=\dfrac{15}{2} \end{cases}$

Tới đây, huy động kiến thức về định lí Vi – ét đảo, ta có:

x, y là nghiệm phương trình: $X^2-5X+\dfrac{15}{2}=0$

Ta thấy: $\Delta=25-30=-5\leq 0$ nên phương trình vô nghiệm.

Vậy hệ đã cho vô nghiệm.

- Đối với câu f, đây là hệ phương trình bậc nhất ba ẩn đã có đúng dạng nên ta dùng phương pháp Gau – xơ khử dần ẩn số để đưa về hệ phương trình dạng tam giác, cụ thể như sau:

Đối với hệ này, việc khử ẩn *x* không đơn giản lắm. Tuy nhiên, nếu chú ý đến hệ số của *z* ở ba phương trình, ta thấy dễ khử ẩn *z* ở hai phương trình cuối. Nhân hai vế của phương trình đầu với 2 rồi cộng từng vế với phương trình thứ hai. Nhân hai vế của phương trình đầu với -3 rồi cộng từng vế với phương trình thứ ba, ta được hệ phương trình: $\begin{cases} -3x+2y-z=-2 \\ -x+y=6 \\ 11x-8y=-3 \end{cases}$

Đến đây, ta thấy dễ khử ẩn *x* trong phương trình thứ ba. Chẳng hạn, nhân hai vế của phương trình thứ hai với 8 rồi cộng từng vế với phương trình thứ ba, ta được: $\begin{cases} -3x+2y-z=-2 \\ -x+y=6 \\ 3x=45 \end{cases}$

Hệ phương trình này có dạng tam giác. Giải lần lượt từ phương trình thứ ba lên ta được: $x=15; y=21; z=-1$

Vậy $(x;y;z)=(15;21;-1)$

- Đối với câu g, để giải hệ phương trình này, ta có thể làm tương tự câu f hoặc giải bằng cách biến đổi, cụ thể như sau:

Cộng ba phương trình theo vế ta được: $x+y+z=1$ (4)

Trừ (4) lần lượt cho (2), (3), (1) ta được: $x=2; y=3; z=-4$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là: $(x;y;z)=(2;3;-4)$

2.2.5 Biện pháp 5: Rèn luyện kĩ năng biến đổi bài toán theo nhiều hình thức khác nhau để huy động kiến thức thích hợp giải phương trình, hệ phương trình

Trong dạy học, khi đứng trước một vấn đề, học sinh cần xem xét mối liên hệ giữa các đại lượng, phán đoán các khả năng có thể xảy ra và biến đổi bài toán. Có nhiều cách khác nhau để biến đổi bài toán, có thể biến đổi đồng thời cả nội dung và hình thức thông qua các phép biến đổi tương đương, hoặc đưa bài toán về gần bài toán đã biết. Trong chương phương trình, hệ phương trình có rất nhiều bài tập đa dạng, phong phú với nhiều cách biến đổi, cách nhìn nhận ở các gốc độ khác nhau sẽ có những cách giải khác nhau. Do đó, việc rèn luyện cho học sinh biến đổi bài toán theo nhiều hình thức khác nhau sẽ giúp cho các em rèn luyện năng lực huy động kiến thức một cách triệt để và có thể xử lí bài toán một cách dễ dàng.

Giáo viên cần hướng dẫn cho học sinh làm những bài toán với nhiều cách giải khác nhau để có thể phát triển năng lực huy động kiến thức, từ đó phân tích rõ ưu nhược điểm của mỗi cách, hướng cho các em đến cách giải tối ưu nhất.

***Ví dụ 2.32*:** Giải và biện luận phương trình:

$$x^4 - 2ax^2 + a^2 - x - a = 0 \quad (*)$$

Với sự huy động kiến thức khác nhau của học sinh nên sẽ có các lời giải khác nhau.

Cách 1: Phương trình (*) là phương trình bậc bốn ẩn *x* và tham số *a* nên sẽ giải và biện luận (*) theo *a*.

$$(*) \Leftrightarrow (x^2 - a)^2 - x - a = 0$$
$$\Leftrightarrow (x^2 - a)^2 - x^2 + x^2 - x - a = 0$$
$$\Leftrightarrow (x^2 - a - x)(x^2 - a + x) + (x^2 - a - x) = 0$$
$$\Leftrightarrow (x^2 - a - x)(x^2 - a + x + 1) = 0 \quad (**)$$

Sau đó thực hiện các bước giải biện luận (**) theo *a* khá đơn giản.

Cách 2: Nếu nhìn nhận vế trái của (*) là phương trình bậc hai ẩn a

$$(*) \Leftrightarrow a^2 - (2x^2 + 1)a + x^4 - x = 0$$

- Ta có: $\Delta = 4x^2 + 4x + 1 = (2x+1)^2$

Việc giải và biện luận (*) đến đây thật đơn giản vì biệt thức $\Delta \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

So sánh hai cách giải, ta thấy cách giải thứ hai đơn giản hơn. Tuy nhiên, muốn giải được cách hai đòi hỏi học sinh phải biết cách huy động kiến thức về phương trình bậc hai.

Như vậy, trước một bài toán, cần xem xét vấn đề một cách sâu sắc, kĩ lưỡng, biết liên tưởng đến những vấn đề quen thuộc. Việc làm này có tác dụng thúc đẩy quá trình huy động và tổ chức kiến thức cho học sinh một cách liên tục, tích cực, giúp học sinh rèn luyện các thao tác tư duy.

***Ví dụ 2.33*:** Giải phương trình: $|x-3| = 2x+1 \quad (1)$

Huy động kiến thức về cách giải phương trình có chứa giá trị tuyệt đối, ta có các cách sau:

Lời giải:

Cách 1: Sử dụng định nghĩa của giá trị tuyệt đối

- Nếu $x \geq 3$ thì phương trình (1) trở thành $x-3=2x+1$. Từ đó: $x=-4$

Giá trị $x=-4$ không thỏa mãn điều kiện $x \geq 3$ nên bị loại.

- Nếu $x<3$ thì phương trình (1) trở thành $-x+3=2x+1$. Từ đó: $x=\frac{2}{3}$

Giá trị này thỏa mãn điều kiện $x<3$ nên là nghiệm.

Cách 2: Bình phương hai vế để khử dấu giá trị tuyệt đối.

Bình phương hai vế của phương trình (1) ta đưa đến phương trình hệ quả

$$(1) \Rightarrow (x-3)^2=(2x+1)^2$$
$$\Rightarrow x^2-6x+9=4x^2+4x+1$$
$$\Rightarrow 3x^2+10x-8=0.$$

Phương trình cuối có hai nghiệm là $x=-4$ và $x=\frac{2}{3}$

Thử lại ta thấy phương trình (1) chỉ có nghiệm là $x=\frac{2}{3}$

Trong ví dụ trên, ta có thể dùng cả hai cách để giải, mỗi cách có ưu điểm riêng. Nếu dùng định nghĩa của giá trị tuyệt đối, ta chỉ cần kiểm tra điều kiện. Còn nếu bình phương hai vế ta đi tới phương trình hệ quả và cuối cùng phải thử lại vào phương trình đầu để kiểm tra. Vì vậy, nếu học sinh không biết cách huy động kiến thức về giải phương trình, mà ở đây cụ thể là phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối thì có thể sẽ mơ hồ trong cách giải và dẫn đến phạm nhiều sai lầm.

***Ví dụ 2.34*:** Giải phương trình: $x^2-3x+1+\sqrt{2x-1}=0$

Đây là phương trình chứa dấu căn dạng quen thuộc, thường thì học sinh sẽ dùng phép biến đổi tương đương, cụ thể như sau:

Cách 1:

$$x^2-3x+1+\sqrt{2x-1}=0 \Leftrightarrow \sqrt{2x-1}=-(x^2-3x+1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+1\le 0 \\ (x^2-3x+1)^2=2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\le x\le \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \\ (x-1)^2(x^2-4x+2)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\le x\le \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2-\sqrt{2} \\ x=2+\sqrt{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2-\sqrt{2} \end{cases}$$

Với phương pháp trên, ta dễ dàng tìm ra nghiệm của phương trình. Trong một số phương trình không có nghiệm nguyên dương thì sau khi bình phương ta phải dùng hệ số bất định, chẳng hạn như đặt:

$x^4-3x^3+10x^2-6x+2=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$. Chúng ta phải đi tìm các hệ số *a, b, c, d*. Sau đó đi giải từng phương trình bậc hai.

Ngoài ra chúng ta có thể phân tích phương trình đã cho về dạng phương trình tích, cụ thể như sau:

Cách 2:

$$x^2-3x+1+\sqrt{2x-1}=0 \Leftrightarrow x^2-(2x-1)+\sqrt{2x-1}-x=0$$
$$\Leftrightarrow (x-\sqrt{2x-1})(x+\sqrt{2x-1}-1)=0$$

Tới đây, huy động kiến thức về cách giải phương trình tích và phương trình chứa dấu căn để giải.

Ta cũng tìm được nghiệm: $x=1; x=2-\sqrt{2}$

Ngoài ra, ta có thể biến đổi phương trình như sau:

Cách 3:

$$x^2-3x+1+\sqrt{2x-1}=0 \Leftrightarrow x^2-x+\frac{1}{4}=(2x-1)-\sqrt{2x-1}+\frac{1}{4}$$
$$(x-\frac{1}{2})^2=(\sqrt{2x-1}-\frac{1}{2})^2$$
$$\Leftrightarrow (x-\sqrt{2x-1})(x+\sqrt{2x-1}-1)=0$$

Tới đây, có thể giải như cách 2.

Qua ví dụ trên, ta thấy một bài toán có thể có nhiều cách tùy thuộc vào khả năng biến đổi và huy động kiến thức của học sinh.

Ví dụ 2.35: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x+y=1 & (1) \\ 3x+4y=-1 & (2) \end{cases}$

Huy động kiến thức về giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn, ta có hai cách sau:

Lời giải

Cách 1**:** Sử dụng phương pháp thế:

Từ phương trình (1) $\Rightarrow y=1-2x$ (3).

Thế phương trình (3) vào phương trình (2) ta được:

$3x+4(1-2x)=-1 \Leftrightarrow -5x=-5 \Leftrightarrow x=1.$

Thế $x=1$ vào phương trình (3) ta được $y=-1$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $x=1$ và $y=-1$

Cách 2: Sử dụng phương pháp cộng đại số

Hệ phương trình đã cho

$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x+4y=4 \\ 3x+4y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x=5 \\ 3x+4y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ 3.1+4y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $x=1$ và $y=-1$

Ví dụ 2.36: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+4y^2=8 & (1) \\ x+2y=4 & (2) \end{cases}$ (1.2)

Cách 1:

Từ (2) rút ra $x=4-2y$ (3) thế vào (1)

(Nên rút x vì khi đó biểu thức sau khi rút sẽ gọn hơn)

Ta được:

$(4-2y)^2+4y^2=8 \Leftrightarrow 16-16y+4y^2+4y^2=8 \Leftrightarrow y^2-2y+1=0$ (*)

$\Leftrightarrow y_1=y_2=1$ thay vào biểu thức (3) ta có: $x=2$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất: $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

Còn cách giải nào khác để giải hệ trên không?

- Yêu cầu học sinh nhận xét về các số hạng tương ứng ở hai phương trình (1) và (2).

Rõ ràng đây không phải là hệ đối xứng với hai ẩn *x, y* nhưng hãy tìm ẩn mới để hệ đối xứng. Từ đó ta có cách 2:

Cách 2:

Hệ (1.2) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+(2y)^2=8 \\ x+2y=4 \end{cases}$

Đặt: $2y=t$

Khi đó hệ trở thành: $\begin{cases} x^2+t^2=8 \\ x+t=4 \end{cases}$ (Đây là hệ đối xứng với hai ẩn *x* và *t*)

Hệ : $\begin{cases} x^2+t^2=8 \\ x+t=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+t)^2-2xt=8 \\ x+t=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+t=4 \\ xt=4 \end{cases}$

Vậy *x, t* là nghiệm của phương trình: $X^2-4X+4=0$ (**) $\Leftrightarrow X_1=X_2=2$

nên hệ có nghiệm $x=t=2$. Suy ra nghiệm của hệ là: $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

Để rèn luyện tư duy cho học sinh giáo viên đặt câu hỏi: Nếu ta thay 8 bằng 0 ai trả lời nhanh nghiệm của phương trình: $\begin{cases} x^2+4y^2=0 \\ x+2y=4 \end{cases}$?

Trả lời: Ta thấy $x^2 \geq 0; y^2 \geq 0$. Suy ra $x^2+y^2 \geq 0$. Vậy phương trình trên có nghiệm $x=y=0$ nhưng khi đó: $x+2y \neq 4$ nên hệ vô nghiệm.

Ta phán đoán thêm một cách giải nữa của hệ, đó là phương pháp đánh giá.

Vấn đề bây giờ là phải đánh giá như thế nào ?

Ta để ý: Hạng tử thứ nhất của phương trình thứ nhất là: x^2

Hạng tử thứ nhất của phương trình thứ hai là: x

Hạng tử thứ hai của phương trình thứ nhất là: $4y^2=(2y)^2$

Hạng tử thứ hai của phương trình thứ hai là: $2y$

Ta nghĩ ngay đến bất đẳng thức liên hệ giữa các số a,b và $a^2,\ b^2$.

Ta huy động kiến thức về bất đẳng thức bunhiacôxki cho 4 số:

$$\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)\geq(ac+bd)^2$$

Từ đó, ta có cách 3:

Cách 3: Áp dụng bất đẳng thức này cho 4 số $x;2y;1;1$ ta có:

$$\left(1^2+1^2\right)\left(x^2+4y^2\right)\geq(x.1+2y.1)^2 \Leftrightarrow 2\left(x^2+4y^2\right)\geq(x+2y)^2 \quad (4)$$

Vậy theo (2) ta có: $2\left(x^2+4y^2\right)\geq 4^2 \Rightarrow x^2+4y^2\geq 8$

Để có (1) cần có $\frac{x}{1}=\frac{2y}{1}\Leftrightarrow x=2y$, thay vào (2) ta được: $y=1;x=2$.

Giáo viên: Vẫn với cách phân tích để tìm ra cách 3, ta còn thấy một phép toán hình học có liên quan đến mối liên hệ giữa 2 cặp số $(a;b)$ và $\left(a^2,b^2\right)$.

Đó là : $\overrightarrow{u}=(a,b),\left|\overrightarrow{u}\right|=\sqrt{a^2+b^2}$

Vậy nếu chọn $\overrightarrow{v}=(1,1)\Rightarrow \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=a+b$. Từ đó gợi cho ta cách giải 4.

Cách 4:

Đặt $\overrightarrow{u}=(x,2y);\ \overrightarrow{v}=(1,1)$

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{u}\right|=\sqrt{x^2+(2y)^2};\ \left|\overrightarrow{v}\right|=\sqrt{2};$

$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=x+2y$

Mặt khác : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=\left|\overrightarrow{u}\right|.\left|\overrightarrow{v}\right|.\cos\alpha \qquad \left(\alpha=\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)\right)$

$\Rightarrow \left|\vec{u}\,\vec{v}\right|\leq\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|$

Giáo viên: Lưu ý cho hoc sinh: $|\ |$ ở bên trái là trị tuyệt đối của một số

$|\ |$ ở bên phải là độ lớn của một véc tơ.

Vậy ta được : $|x+2y|\leq\sqrt{2}.\sqrt{x^2+(2y)^2}$

$$\Leftrightarrow (x+2y)^2 \le 2.\left(x^2+4.y^2\right) \qquad (5).$$

(Trở lại bất đẳng thức (4)), dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$|\cos\alpha| = 1 \Rightarrow \alpha = 0^o$ hoặc $\alpha = 180^o \Leftrightarrow \vec{u};\vec{v}$ cùng phương hay tồn tại

$k \in R$ để: $\vec{u} = k.\vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k.1 \\ 2y = k.1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2y \Rightarrow x = 2; y = 1.$

Cách 5:

Nhân phương trình (2) với -4 sau đó cộng vế với vế vào phương trình (1) ta được:

$$x^2 - 4x + 4y^2 - 16y = -8 \Leftrightarrow (x-2)^2 + 4(y-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

thế vào hệ phương trình ban đầu thấy thoả mãn, vậy hệ có nghiệm duy nhất $x = 2; y = 1$

Đây là một bài toán tương đối dễ nhưng ta có thể khai thác bài toán mang đến nhiều điều lí thú cho học sinh. Ta có thể áp dụng bài này bồi dưỡng học sinh giỏi.

Có thể có nhiều cách giải nữa. Việc tìm ra mỗi cách giải phụ thuộc vào sự liên tưởng, huy động kiến thức hoặc là việc nhìn nhận bài toán dưới nhiều góc độ khác nhau.

Trên đây là những cách giải có thể áp dụng khi giải hệ phương trình nhưng trong quá trình dạy học, giáo viên không nên hướng dẫn học sinh tất cả các cách trên vì sẽ làm cho học sinh khó hiểu và gây cho học sinh lúng túng không biết trường hợp nào sẽ sử dụng được cách đó.

KẾT LUẬN CHƯƠNG 2

Trong chương này, tôi đưa ra các biện pháp bồi dưỡng năng lực huy động kiến thức cho học sinh trong dạy học chủ đề "Phương trình – Hệ phương trình" nhằm minh hoạ tính thực thi của các biện pháp đó.

Trong chương 3 tôi tiến hành triển khai thực nghiệm các biện pháp được trình bày ở chương 2, một mặt là để thu nhận những thông tin phản hồi nhằm từng bước bổ sung hoàn thiện luận văn. Mặt khác là kiểm nghiệm bước đầu tính hiệu quả và khả thi của các phương thức sư phạm đó.

Chương III

THỰC NGHIỆM SƯ PHẠM

3.1 Mục đích thực nghiệm

Mục đích thực nghiệm là kiểm tra tính khả thi và hiệu quả của các biện pháp triển khai dạy học giải bài tập toán theo hướng tăng cường bồi dưỡng năng lực huy động kiến thức thông qua việc dạy một số nhằm kiểm nghiệm tính đúng đắn của giả thuyết khoa học đã đề ra.

3.2 Nội dung thực nghiệm

- Soạn giáo án giảng dạy tiết Ôn tập chương 3, Phương trình qui về phương trình bậc nhất, bậc hai (xem phụ lục).
- Sau đó, kiểm tra một tiết đánh giá mức độ tiếp thu bài của học sinh (xem phụ lục).

3.3 Tiến trình thực nghiệm

3.3.1 Lớp thực nghiệm

Thực nghiệm sư phạm được tiến hành với học sinh lớp 10 Trường trung học phổ thông Lấp Vò 2.

- Lớp thực nghiệm: 10CB1có 37 học sinh.

- Lớp đối chứng: 10CB4 có 34 học sinh.

Trình độ hai lớp tương đối đồng đều.

3.3.2 Tiến trình thực nghiệm.

* Ở lớp thực nghiệm:

Tiến hành thực nghiệm bằng việc dạy tiết Ôn tập chương 3, tiết Phương trình qui về phương trình bậc nhất, bậc hai theo hướng bồi dưỡng năng lực huy động kiến thức của học sinh. Sau khi dạy thực nghiệm xong cho học sinh làm bài kiểm tra 45 phút.

* Ở lớp đối chứng:

- Giáo viên dạy thực nghiệm quan sát hoạt động của học sinh ở lớp đối chứng được giáo viên khác dạy học không theo hướng rèn luyện năng lực huy động kiến thức đã có của học sinh.

- Tiến hành kiểm tra cùng đề với lớp thực nghiệm.

3.3.3 Kết quả thực nghiệm

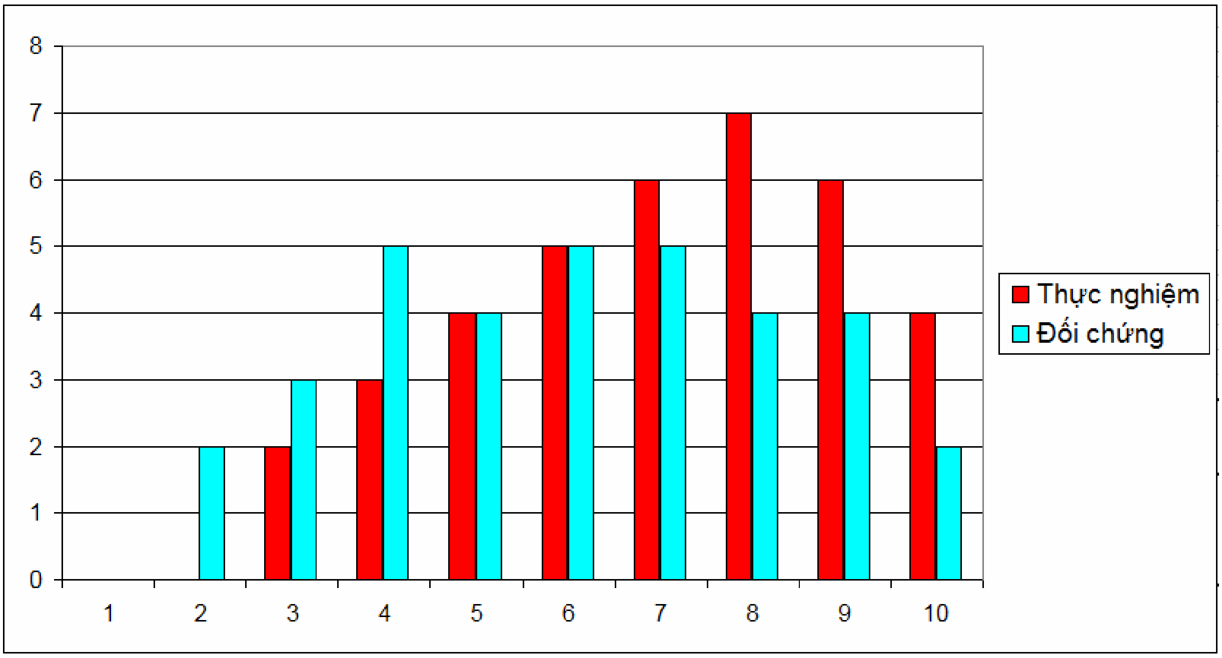
Kết quả bài kiểm tra 45 phút của hai lớp 10CB1, 10CB4

Điểm / Lớp	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Số bài
TN (10CB1)	0	0	2	3	4	5	6	7	6	4	37
ĐC (10CB4)	0	2	3	5	4	5	5	4	4	2	34

Kết quả: Lớp thực nghiệm có: 32/37 (86,49%) đạt trung bình trở lên, trong đó 23/37 (62,16%) đạt khá giỏi.

Lớp đối chứng có 24/34 (70,59%) đạt trung bình trở lên, 15/34 (44,12%) đạt khá giỏi.

Minh họa kết quả trên bằng biểu đồ sau:



Qua việc kiểm tra 45 phút lớp thực nghiệm, tôi có nhận xét như sau:

- Đối với câu 1, cần vận dụng phương pháp giải phương trình chứa ẩn dưới dấu căn, phương trình chứa giá trị tuyệt đối. Đa số học sinh ở hai lớp đều làm tốt câu này do có sự chuẩn bị về kiến thức cũng như nhận biết được dạng bài toán quen thuộc.
- Đối với câu 2, cần vận dụng phương pháp giải hệ phương trình bậc nhất ba ẩn. Đa số học sinh biết cách làm nhưng còn một số ít học sinh kĩ năng biến đổi phương trình còn kém.
- Đối với câu 3, một số học sinh giải và biện luận đúng, biết cách kết luận nghiệm của hệ. Một số học sinh do chưa huy động được cách giải và biện luận phương trình bậc nhất nên dẫn đến thiếu trường hợp.
- Đối với câu 4, dụng ý sư phạm muốn kiểm tra khả năng nhìn nhận bài toán, phân tích bài toán. Để làm được bài toán này, học sinh cần phải có khả năng huy động kiến thức về định lí Vi – ét. Ở câu này thì một số ít học sinh làm được.

3.4 Kết luận về thực nghiệm sư phạm

Qua quan sát hoạt động dạy học và kết quả thu được qua đợt thực nghiệm sư phạm, cho thấy:

- Tính tích cực hoạt động của học sinh lớp thực nghiệm cao hơn lớp đối chứng.

- Nâng cao trình độ nhận thức, khả năng tư duy cho học sinh trung bình và một số học sinh yếu ở lớp thực nghiệm tạo hứng thú và niềm tin cho các em, trong khi điều này chưa có ở lớp đối chứng.

- Khả năng huy động kiến thức của học sinh lớp thực nghiệm cao hơn lớp đối chứng thể hiện qua kết quả bài kiểm tra. Số học sinh đạt trung bình hoặc khá giỏi ở lớp thực nghiệm thường cao hơn lớp đối chứng. Nguyên nhân là học sinh ở lớp thực nghiệm ngoài việc luôn học tập trong hoạt động còn thường xuyên được rèn luyện các tri thức phương pháp như tương tự, khái quát hoá, quy lạ về quen...

Từ những kết quả trên, có thể kết luận: việc hướng dẫn học sinh huy động kiến thức, phát hiện và giải quyết các vấn đề mới nâng cao dần mức độ khó khăn trong dạy học phương trình, hệ phương trình đã có tác dụng giúp học sinh học tập trong hoạt động và bằng hoạt động, góp phần phát triển tư duy sáng tạo, giáo dục tư duy toán học cho học sinh. Như vậy, giả thuyết khoa học của đề tài đã được kiểm nghiệm.

KẾT LUẬN

Đề tài: “ Bồi dưỡng năng lực huy động kiến thức cho học sinh thông qua dạy học chủ đề phương trình - hệ phương trình trong Đại số 10 cơ bản” đã cung cấp những kiến thức cơ bản, cụ thể và những vấn đề liên quan đến bồi dưỡng năng lực huy động kiến thức cho học sinh, các biện pháp cụ thể bồi dưỡng năng lực huy động kiến thức cho học sinh.

Qua đề tài này, tôi đã nghiên cứu và làm một số vấn đề sau:

- Chương 1: Đã nghiên cứu lí luận và thực tiễn về bồi dưỡng năng lực huy động kiến thức cho học sinh trong dạy học chủ đề phương trình, hệ phương trình trong Đại số 10, cơ bản.
- Chương 2: Đã đưa ra được các biện pháp bồi dưỡng năng lực huy động kiến thức cho học sinh trong dạy học chủ đề phương trình, hệ phương trình trong Đại số 10, cơ bản.
- Chương 3: Thực nghiệm để thể hiện việc vận dụng các lí thuyết vào thực tiễn dạy học và kiểm tra tính khả thi của các biện pháp đề xuất.

Mỗi biện pháp đều có tầm quan trọng của nó, tuy nhiên tùy vào sự hiểu biết cũng như mức độ, khả năng nhận biết tri thức của học sinh mà vận dụng từng biện pháp trên sao cho thích hợp. Do đó, khi bồi dưỡng năng lực huy động kiến thức cho học sinh, giáo viên cần phải tìm hiểu trình độ, khả năng nhận thức của học sinh mà vận dụng các biện pháp nhằm đạt hiệu quả cao cho các em. Vì vậy, mong rằng qua đề tài này sẽ giúp giáo viên dạy tốt hơn qua từng biện pháp, giúp cho học sinh bồi dưỡng năng lực huy động kiến thức đạt hiệu quả.

Trong bài khóa luận này khó có thể tránh khỏi sai sót, em rất mong nhận được sự góp ý của quý Thầy Cô và bạn đọc.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1]. Lê Hồng Đức, Lê Bích Ngọc, Lê Hữu Trí*, Phương pháp giải toán Đại số*, NXB Đại học quốc gia Hà Nội.

2]. Tập thể giảng viên và cán bộ trường Đại học Vinh, *Chuyên đề bồi dưỡng giáo viên trung học phổ thông môn Toán học*, NXB Đại học quốc gia Hà Nội.

3]. Trần Văn Hạo (chủ biên), Vũ Tuấn, Doãn Minh Cường, Đỗ Mạnh Hùng, Nguyễn Tiến Tài, *Đại số 10 cơ bản*, NXB giáo dục.

4]. Trần Văn Hạo (chủ biên), Vũ Tuấn, Doãn Minh Cường, Đỗ Mạnh Hùng, Nguyễn Tiến Tài, *sách giáo viên Đại số 10 cơ bản*, NXB giáo dục.

5]. Nguyễn Bá Kim (2004), *Phương pháp dạy học môn Toán,* NXB Đại học sư phạm.

6]. Luật giáo dục năm 2005.

7]. Bùi Văn Nghị (2008), *Phương pháp dạy học những nội dung cụ thể môn Toán*, NXB Đại học sư phạm.

8]. G. Polya (1997), *Giải bài toán như thế nào*, NXB Giáo dục, Hà Nội.

9]. Khương Thị Thanh, Luận văn thạc sĩ: *"Bồi dưỡng năng lực huy động kiến thức cho học sinh khá, giỏi bậc trung học cơ sở thông qua phát triển các bài toán cơ bản"*, Đại Học Vinh.

10]. Nguyễn Thị Thu, Luận văn: *"Rèn luyện năng lực huy động kiến thức cho học sinh trong dạy học phát hiện và giải quyết vấn đề ở trường trung học phổ thông thể hiện qua chủ đề phương pháp tọa độ trong không gian"*, Đại học Vinh.

11]. Nguyễn Duy Thuận*, Giáo trình phát triển tư duy toán học trong học sinh*, NXB Đại học sư phạm.

12]. Nguyễn Trọng Tuấn, Đặng Phúc Thanh, *Rèn luyện giải toán Đại số 10,* NXB giáo dục.

13]. Vũ Tuấn (chủ biên), Doãn Minh Cường, Trần Văn Hạo, Đỗ Mạnh Hùng, Phạm Phu, Nguyễn Tiến Tài, *bài tập Đại số 10 cơ bản*, NXB giáo dục.

14]. Võ Thanh Văn (Chủ biên), TS. Lê Ngọc Sơn, Nguyễn Ngọc Thủy, *Chuyên đề ứng dụng phương trình và bất phương trình đại số trong giải toán trung học phổ thông*, NXB Đại học sư phạm.